RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1913.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Formole generali per le superficie riferite alle loro linee asintotiche con alcune applicazioni* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Le formole per la teoria generale delle superficie a curvature opposte, riferite alle loro linee asintotiche come a linee coordinate, sono state poste sotto varie forme, tra le quali notevolissima è quella di Lelieuvre, che pone questa teoria in relazione colle equazioni di Moutard del tipo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta,$$

ed ha la massima importanza per la teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili.

Nella presente Nota mi propongo di far conoscere un'altra forma delle equazioni stesse, che può riuscire vantaggiosa in diverse ricerche, e conduce ad una nuova nozione di *equazioni intrinseche* per le superficie a curvature opposte.

Dimostreremo che, per individuare una tale superficie, si possono dare ad arbitrio i seguenti elementi: 1° *due asintotiche* C, Γ *di diverso sistema*, 2° *l'espressione della curvatura* K *in funzione dei parametri* u, v *delle asintotiche*. Volendo meglio precisare queste condizioni iniziali, è da osservarsi che le due curve C, Γ, pure essendo date arbitrariamente, dovranno incrociarsi in un punto O dello spazio ed ivi avere torsioni eguali e di segno contrario e piano osculatore comune, condizioni queste notoriamente

necessarie (teorema d'Enneper). Quanto ai parametri u, v, noi li supporremo dati, per fissare le idee, dagli archi stessi delle curve Γ, C, contati a partire dal loro punto comune O. Allora l'espressione $K = K(u, v)$ della curvatura (negativa) potrà assumersi affatto ad arbitrio, purchè soddisfi alla condizione (necessaria) di ridursi lungo le curve C, Γ al quadrato, cangiato di segno, della torsione di queste curve.

Fissati così arbitrariamente questi elementi, dimostreremo esistere *una ed una sola superficie* S che contiene C, Γ come asintotiche, e la cui curvatura K ha l'espressione prefissata

$$K = K(u, v).$$

Ad assicurare per altro l'applicabilità dei teoremi generali della teoria delle equazioni a derivate parziali al caso nostro, sarà necessario che ci restringiamo al *campo analitico*; pertanto le curve date C, Γ, come pure l'espressione $K(u, v)$ della curvatura, e la superficie finale stessa saranno supposte *analitiche*.

Una prima applicazione del teorema generale viene fatta nella presente Nota alle superficie caratterizzate dalla espressione

$$\text{(A)} \qquad K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}$$

della curvatura; una superficie di questa classe (A) viene determinata appena se ne fissano (ad arbitrio) due asintotiche C, Γ di diverso sistema. Si sa che le superficie (A) sono geometricamente caratterizzate dall'appartenere, come falde focali, a congruenze W per le quali le curvature in punti corrispondenti delle due falde focali risultano eguali. Le superficie loro *associate* nelle deformazioni infinitesime possono deformarsi in modo continuo con conservazione del sistema coniugato (u, v) e dànno tutte e sole le superficie con *sistema coniugato persistente*.

Di queste ultime superficie, dopo le ricerche fondamentali di Peterson e Cosserat, molti altri geometri si sono occupati, anche in tempi recenti. Ma nessuno sembra avere avuto conoscenza della teoria delle *trasformazioni per congruenze* W per le superficie della classe (A), già da me stabilita nel 1890 e riportata nel volume II delle mie *Lezioni* (§§ 249-252). Servendosi di queste trasformazioni, si possono trovare, *con sole quadrature*, quante si vogliano superficie con sistema coniugato persistente, ed in questo risultato generale sono incluse, come casi particolarissimi, molte delle ricerche posteriori indicate.

Credo pertanto opportuno di ritornare nella presente Nota su quei metodi di trasformazione, limitandomi, per brevità, al caso di quelle speciali superficie S della classe (A) che sono caratterizzate dall'avere *per asintotiche di un sistema curve a torsione costante*, per le quali cioè una delle

due funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ si riduce ad una costante. Qui poniamo le trasformazioni sotto nuova forma e studiamo i sistemi (S) di tali superficie che nascono dall'applicare una successione continua di trasformazioni *infinitesime* della classe indicata. Come nel caso particolare delle superficie pseudosferiche ($\varphi(u) = \text{cost}$, $\psi(v) = \text{cost}$), ove si generano i sistemi obliqui di Weingarten, così anche nel caso attuale le traiettorie descritte dai singoli punti della superficie S sono *curve di Bertrand*, però di famiglia variabile coll'asintotica a torsione costante del sistema.

2. Abbiasi una superficie S a curvatura K negativa, che riferiamo alle sue linee asintotiche reali u, v e sia

$$(1) \qquad ds^2 = H_1^2 du^2 + 2H_1H_2 \cos\omega \, du\, dv + H_2^2 dv^2$$

il quadrato del suo elemento lineare, dove

$$(2) \qquad ds_u = H_2 dv \quad , \quad ds_v = H_1 du$$

indicano gli archi elementari delle rispettive asintotiche $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, ed $\omega = \omega(u, v)$ l'angolo delle asintotiche stesse. Indicheremo poi la curvatura (negativa) K con

$$K = -\frac{1}{T^2}.$$

Per il teorema d'Enneper (precisato nel segno) le torsioni $\frac{1}{T_u}, \frac{1}{T_v}$ delle asintotiche $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ sono rispettivamente eguali l'una a $\frac{+1}{T}$, l'altra a $\frac{-1}{T}$, e noi supporremo

$$(4) \qquad \frac{1}{T_u} = \frac{1}{T} \quad , \quad \frac{1}{T_v} = -\frac{1}{T}.$$

Come triedro principale nel punto (x, y, z) della superficie, introduciamo il triedro delle tre direzioni principali per l'asintotica $u = \text{cost}$: tangente, normale principale e binormale, i cui rispettivi coseni di direzione saranno indicati al solito con (α, β, γ), (ξ, η, ζ), (λ, μ, ν).

Le derivate di x, y, z rapporto ad u, v possono scriversi sotto la forma

$$(5) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = H_1(\alpha \cos\omega + \xi \operatorname{sen}\omega) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = H_2\alpha$$

colle analoghe per y, z; ed è da notarsi che con queste formole si vengono ad attribuire ai coseni di direzione (X, Y, Z) della superficie i valori [1]

$$(6) \qquad X = -\lambda \quad , \quad Y = -\mu \quad , \quad Z = -\nu.$$

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. I, pag. 113.

Denotando con $\frac{1}{\varrho_u}$ la flessione delle $u = \text{cost}$, abbiamo dalle formole di Frenet

$$\frac{d\alpha}{ds_u} = \frac{\xi}{\varrho_u} \quad , \quad \frac{d\xi}{ds_u} = -\frac{\alpha}{\varrho_u} - \frac{\lambda}{T_u} \quad , \quad \frac{d\lambda}{ds_u} = \frac{\xi}{T_u} ,$$

e se introduciamo una nuova funzione L, ponendo

$$\frac{1}{\varrho_u} = \frac{L}{H_2} , \tag{7}$$

potremo scrivere

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = L\xi \quad , \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = -L\alpha - \frac{H_2}{T}\lambda \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{H_2}{T}\xi . \tag{8}$$

Ora, le linee u, v essendo le asintotiche, pei coefficienti D, D'', D' della seconda forma fondamentale della superficie abbiamo

$$D = D'' = 0$$

$$\frac{D'}{H_1^2 H_2^2 \operatorname{sen}^2\omega} = -K = \frac{1}{T^2} . \tag{9}$$

Ma precisiamo anche il segno da attribuirsi a D' paragonando l'ultima delle (8) e le (6) colle formole fondamentali (II), pag. 117 delle *Lezioni*, e così si trova

$$\frac{D'}{H_1 H_2 \operatorname{sen}\omega} = \frac{1}{T} . \tag{9}$$

Dopo di ciò, dalla formola (l. c.)

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{FD'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v} ,$$

paragonando colle precedenti, si deduce

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{H_1}{T}(\alpha \operatorname{sen}\omega - \xi\cos\omega) .$$

In fine, per calcolare anche le derivate di α, ξ rapporto ad u, introduciamo l'altra *rotazione*

$$M = S\xi\frac{\partial\alpha}{\partial u} = -S\alpha\frac{\partial\xi}{\partial u} .$$

e risulterà

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = M\xi - \frac{H_1 \operatorname{sen}\omega}{T}\lambda \quad , \quad \frac{\partial\xi}{\partial u} = -M\alpha + \frac{H_1\cos\omega}{T}\lambda .$$

Così per una qualunque superficie S, riferita alle sue linee asintotiche (u, v), abbiamo le formole fondamentali che riuniamo nel quadro seguente:

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{H}_1(\alpha\cos\omega + \xi\,\mathrm{sen}\,\omega) \quad , \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{H}_2\alpha \\
\dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \mathrm{M}\xi - \dfrac{\mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{T}}\lambda \quad , \quad \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -\mathrm{M}\alpha + \dfrac{\mathrm{H}_1\cos\omega}{\mathrm{T}}\lambda\,, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = \dfrac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{T}}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega - \xi\cos\omega) \\
\dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \mathrm{L}\xi \quad , \quad \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -\mathrm{L}\alpha - \dfrac{\mathrm{H}_2}{\mathrm{T}}\lambda \quad , \quad \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = \dfrac{\mathrm{H}_2}{\mathrm{T}}\lambda\,.
\end{cases}
$$

Restano da scrivere le *condizioni di integrabilità* pel sistema (I), equivalenti alle equazioni di Gauss e di Codazzi.

Per le rotazioni, che figurano nella seconda e terza linea del quadro (I), troviamo le tre

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\mathrm{H}_1\cos\omega}{\mathrm{T}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\mathrm{H}_2}{\mathrm{T}}\right) = \dfrac{\mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{T}}\mathrm{L} \\
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{T}}\right) = -\dfrac{\mathrm{H}_2}{\mathrm{T}}\mathrm{M} - \dfrac{\mathrm{H}_1\cos\omega}{\mathrm{T}}\lambda \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{T}^2} = 0\,,
\end{cases}
$$

e per le traslazioni, nella prima linea del quadro (I), le altre due

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial v}(\mathrm{H}_1\cos\omega) - \dfrac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial u} = \mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega\,.\,\mathrm{L} \\
\dfrac{\partial}{\partial v}(\mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega) = \mathrm{H}_2\mathrm{M} - \mathrm{H}_1\cos\omega\,.\,\mathrm{L}\,.
\end{cases}
$$

Combinando opportunamente queste cinque equazioni, si ottiene subito il sistema equivalente seguente:

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial u} = \dfrac{\mathrm{H}_1\cos\omega}{2\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{H}_2}{2\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial u} = \dfrac{1}{2\mathrm{H}_2\mathrm{T}}\left(\dfrac{\mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{2\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - \mathrm{H}_1\cos\omega\,\mathrm{L}\right) + \\
\qquad\qquad + \mathrm{H}_1\,\mathrm{sen}\,\omega\,\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{H}_2\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right) - \dfrac{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{T}^2} \\
\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial v} = \dfrac{\mathrm{H}_1}{2\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{H}_2\cos\omega}{2\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} \\
\dfrac{\partial \omega}{\partial v} = -\mathrm{L} - \dfrac{\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\omega}{2\mathrm{H}_1\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\,,
\end{cases}
$$

mentre la rotazione M risulta espressa dalla formola

$$(10) \qquad M = \frac{H_1 \operatorname{sen} \omega}{2H_2 T} \frac{\partial T}{\partial v} .$$

Viceversa se le cinque funzioni $H_1 , H_2 , \omega , L , T$ di u , v soddisfano le (II), le formole (I), nelle quali per M si ponga il valore (10), dànno un sistema illimitatamente integrabile e definiscono (intrinsecamente) una superficie S, riferita alle sue asintotiche u , v.

3. Ora pensiamo la funzione $T = T(u , v)$ *assegnata a priori*, cioè assegnata l'espressione della curvatura $K = -\frac{1}{T^2}$. Il sistema (I) delle quattro equazioni del 1° ordine per le quattro funzioni incognite

$$H_2 , L , H_1 , \omega$$

è un così detto sistema canonico del 1° ordine completamente integrabile [1]. La variabile u è principale per le funzioni (H_2 , L), parametrica per le altre due (H_1 , ω); invece v è principale per (H_1 , ω) e parametrica per (H_2 , L). Dai teoremi generali sui sistemi di equazioni a derivate parziali risulta che esiste uno ed un solo sistema integrale (olomorfo) che soddisfi alle condizioni iniziali seguenti:

1ª) H_2 , L si riducono, per un valore particolare di u, sia $u = 0$, a funzioni arbitrarie date (olomorfe) della variabile v:

$$H_2(0 , v) \quad , \quad L(0 , v) ;$$

2ª) H_1 , ω si riducano similmente per $v = 0$ a funzioni arbitrarie (olomorfe) di u

$$H_1(u , 0) \quad , \quad \omega(u , \omega) .$$

[La funzione data $T(u , v)$ si suppone alla sua volta olomorfa].

Interpretando geometricamente queste condizioni, veniamo appunto a stabilire il teorema sulle equazioni intrinseche, indicato al n. 1, come ora andiamo a verificare.

Occupiamoci dapprima della parte del teorema che si riferisce alla *unicità*, e supponiamo adunque che le asintotiche $u = 0 , v = 0$ debbano

[1] Usiamo qui la locuzione introdotta dal Bourlet nella sua Memoria: *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*, Annales de l'École Normale Supérieure 3ème série, tom. VII (1891) Supplément.

I sistemi di equazioni a derivate parziali che si presentano nella massima parte delle ricerche di geometria infinitesimale appartengono alla forma tipica del Bourlet, od a questa si possono ridurre. Diventa quindi, anche geometricamente, d'importanza fondamentale il teorema per l'esistenza degli integrali stabilito a pag. 35 della citata Memoria (teorema VIII).

rispettivamente ridursi a due curve (analitiche) prefissate C, Γ, che si incrociano in un punto O dello spazio e soddisfano alle altre condizioni enumerate al n. 1. Fissiamo ancora che i parametri v, u abbiano il significato degli archi di queste rispettive curve C, Γ, contati a partire da O. Saranno per ciò note, come funzioni (olomorfe) di v, le due curvature

$$\frac{1}{\varrho_u} \quad , \quad \frac{1}{T_u}$$

della $C(u = 0)$, e così come funzioni (olomorfe) di u le curvature

$$\frac{1}{\varrho_v} \quad , \quad \frac{1}{T_v}$$

della $\Gamma(v = 0)$. Si suppone inoltre che la funzione prefissata (olomorfa) $\frac{1}{T(u, v)}$ si riduca per $u = 0$ alla $\frac{1}{T_u}$ e per $v = 0$ alla $-\frac{1}{T_v}$, conformemente alle formole (4).

Dimostriamo che le condizioni geometriche imposte equivalgono appunto a fissare le funzioni iniziali

$$H_2(0, v) \quad , \quad L(0, v)$$
$$H_1(u, 0) \quad , \quad \omega(u, 0) .$$

Intanto, pel modo come abbiamo scelto i parametri u, v, risulta immediatamente

$$H_2(0, v) = 1 \quad , \quad H_1(u, 0) = 1 ;$$

poi dalla (7)

$$L(0, v) = \left(\frac{1}{\varrho_u}\right)_{u=0} ,$$

che dà $L(0, v)$ come funzione nota di v.

Per dimostrare in fine che anche $\omega(u, 0)$ viene ad essere conosciuta, conviene calcolare gli elementi relativi alle asintotiche $v = \text{cost}$ del secondo sistema.

Indicando con α_1, ξ_1, λ_1 ecc. i coseni delle tre direzioni principali di queste curve, troviamo subito dalle equazioni fondamentali (I)

$$\alpha_1 = \alpha \cos \omega + \xi \operatorname{sen} \omega ,$$

e derivando rapporto ad u, coll'osservare le formole di Frenet e le (I) stesse, deduciamo

$$\frac{H_1}{\varrho_v} \xi_1 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} + M\right) (-\alpha \operatorname{sen} \omega + \xi \cos \omega)$$

colle analoghe per η_1 , ξ_1. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{\varrho_v} = \frac{\varepsilon}{H_1}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u} + M\right) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$\xi_1 = \varepsilon(-\alpha \operatorname{sen} \omega + \xi \cos \omega),$$

dove il segno di $\varepsilon = \pm 1$ deve essere tale da rendere (secondo le convenzioni fondamentali) $\frac{1}{\varrho_v}$ positivo. Dopo ciò abbiamo

$$\lambda_1 = \varepsilon\lambda \quad , \quad \mu_1 = \varepsilon\mu \quad , \quad \nu_1 = \varepsilon\nu ,$$

$$\frac{1}{T_v} = -\frac{1}{T} ;$$

ed ora il segno da attribuirsi ad ε viene fissato, dalle condizioni geometriche iniziali, come positivo o negativo secondo che in O le due direzioni positive delle binormali a C , Γ sono concordanti ovvero opposte.

Ora facciamo nella (11) $v = 0$, ed osserviamo che $\frac{1}{\varrho_v}$ diventa una funzione nota di u, sia $F(u)$, mentre $H_1(u , 0) = 1$; e d'altra parte

$$\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial u} \quad , \quad \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial v}$$

diventeranno pure, per $v = 0$, funzioni note di u, diciamo

$$\left(\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{v=0} = A(u) \quad , \quad \left(\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{v=0} = B(u).$$

Se poniamo ancora, per maggiore chiarezza,

$$\omega(u , 0) = \bar{\omega}(u) \quad , \quad H_2(u , 0) = \overline{H}_2(u),$$

la (10), ove si faccia $v = 0$, porge

$$(M)_{v=0} = \frac{\operatorname{sen} \bar{\omega}}{\overline{H}_2} \cdot B(u),$$

e la (11) diventa

$$\frac{d\bar{\omega}}{du} + \frac{\operatorname{sen} \bar{\omega}}{\overline{H}_2} B(u) = \varepsilon F(u) .$$

D'altra parte la prima delle (II) dà per $v = 0$

$$\frac{d\overline{H}_2}{du} = B(u) \cos \bar{\omega} + A(u) \cdot \overline{H}_2 .$$

Le due equazioni del 1° ordine ora scritte per $\bar{\omega}(u) , \overline{H}_2(u)$ determinano queste funzioni dai loro valori iniziali per $u = 0$. Ma questi sono noti, il

secondo come eguale a *1*, il primo come il valore ω_0 dell'angolo sotto cui si incontrano le due curve C , Γ in O. Così è perfettamente fissata la funzione

$$\omega(u\,,\,0) = \bar{\omega}(u)\,,$$

come si era asserito, ed il teorema di unicità è dimostrato.

Ma è facile ora, invertendo le considerazioni superiori, di trasformarlo in teorema di esistenza. E invero, assunti i valori iniziali

$$H_2(0\,,\,v)\,,\ L(0\,,\,v)\ \ ;\ \ H_1(u\,,\,0)\,,\ \omega(u\,,\,0)$$

in modo conforme alle condizioni ottenute, si consideri il sistema integrale corrispondente delle (II)

$$H_2(u\,,\,v)\,,\ L(u\,,\,v)\ \ ;\ \ H_1(u\,,\,v)\,,\ \omega(u\,,\,0)$$

il quale, per quanto si detto, esiste ed è unico.

Dalle formole (I) risulterà definita una superficie S, riferita alle asintotiche $u\,,v$, e su questa le curve $u = 0\,,\ v = 0$ avranno le medesime *equazioni intrinseche* delle curve prescritte C , Γ, ma inoltre anche la stessa posizione relativa, e per ciò coincideranno con esse.

Il teorema è così stabilito nelle sue due parti e possiamo brevemente enunciarlo sotto la forma:

Per definire una qualunque superficie S *a curvature opposte si possono dare ad arbitrio due linee asintotiche di contrario sistema, e l'espressione della curvatura in ogni punto, come funzione dei parametri asintotici.*

Un'immediata conseguenza di questo teorema generale è che: se si mantiene fissa l'espressione di $K(u\,,\,v)$, indi anche le torsioni di C , Γ, *ma si fanno variare ad arbitrio le loro flessioni*, come pure la posizione relativa delle due curve, si ottiene un'infinità di superficie (dipendente da due funzioni arbitrarie); e queste si corrispondono punto a punto per eguaglianza di curvatura nei punti corrispondenti e con conservazione delle linee asintotiche (dei sistemi coniugati).

Matematica. — *Le equazioni generali della Dinamica e la legge di gravitazione.* Memoria del Corrisp. E. Almansi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Meccanica. — *Sui fenomeni ereditarii.* Nota del Socio Vito Volterra.

Matematica. — *Resto nelle formole di quadratura, espresso con un integrale definito.* Nota del Corrisp. G. Peano.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Meccanica. — *Sulla deformazione degli anelli circolari elastici soggetti a forze distribuite lungo il contorno.* Nota dell'ingegnere GIUSEPPE ALBENGA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nello studio di linee elastiche alquanto complesse può tornare utile il prendere le mosse dal principio del minimo lavoro espresso sotto la forma implicitamente contenuta in alcune interessanti ricerche di Walter Ritz su problemi di teoria dell'elasticità ed illustrata chiaramente da Hans Lorenz-Danzig in una recente Nota (1).

Indichiamo con L_i il lavoro interno di deformazione del corpo che si considera, con L_a il lavoro eseguito dalle forze esterne durante la deformazione, ritenendo al solito che queste forze crescano con continuità dal valore zero al valore finale: il teorema del minimo lavoro può scriversi, seguendo i citati autori:

$$L_i - 2L_a = \text{valore estremo.} \tag{1}$$

Quando nella (1) si facciano esplicitamente comparire le forze esterne ed alcune semplici funzioni degli spostamenti dei punti del solido è possibile giungere con ovvie trasformazioni ad equazioni differenziali della linea elastica che si prestano ad una integrazione relativamente agevole.

Così quando la deformazione sia abbastanza piccola perchè valga il principio del minimo lavoro, possiamo trovare, partendo dalla (1), la deformata di un anello circolare, omogeneo, di spessore costante e piccolo rispetto al raggio, sollecitato da forze distribuite lungo il contorno. Questo problema che per alcuni casi particolari fu risoluto da Saint Venant fin dal 1843 (2) ha una importante applicazione nel calcolo delle condotte forzate di grande diametro, delle quali il prof. Guidi si è occupato in una serie di Memorie, che esauriscono l'argomento sotto ogni suo pratico aspetto (3).

Indichiamo con ξ ed η rispettivamente lo spostamento tangenziale e quello radiale di un punto generico, con p e q le componenti radiale e tangenziale della forza esterna per unità di lunghezza dell'asse ed atteniamoci

(1) Cfr. H. Lorenz, *Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie* nella Physikalische Zeitschrift, 1913, pag. 71 e Memorie ivi citate.

(2) *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple et à double courbure.* Comptes Rendus, Paris, tom. 17, pp. 942 e 1020.

(3) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1911-12 e 1912-13; cfr. anche le belle ricerche di Colonnetti negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1911-12 e nei Rendiconti dei Lincei, 1912, 2° semestre.

per le altre notazioni alle *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni* del professore Guidi.

Per r (raggio dell'asse) abbastanza grande di fronte allo spessore dell'anello e trascurando al solito il lavoro di deformazione dovuto al taglio avremo:

$$L_i = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ}\,ds + \int_0^l \frac{N^2}{2EF}\,ds \tag{2}$$

dove con l si indicò la lunghezza dello sviluppo dell'asse dell'anello. Ma, ricorrendo ad un sistema di coordinate polari avente l'origine nel centro dell'anello, abbiamo notoriamente [1]:

$$M = \pm \frac{EJ}{r^2}\left(\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right). \tag{3}$$

Poichè nella (2) entra solo il quadrato del momento flettente è superflua ogni convenzione riguardo ai segni.

Avremo inoltre

$$N = EF\varepsilon_0. \tag{4}$$

Ora proiettando sulla posizione occupata da un elemento ds prima della deformazione la poligonale costituita dagli spostamenti ξ ed η degli estremi di esso e dalla posizione finale dell'elemento deformato, si ha

$$\eta = \frac{d\xi}{d\varphi} - r\varepsilon_0 \tag{5}$$

e di qui e dalla (4)

$$N = \frac{EF}{r}\left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right). \tag{6}$$

Dalla (3) e dalla (6) risulta, sostituendo a ds il suo valore $r\,d\varphi$,

$$L_i = \frac{EJ}{2r^4}\int_0^l r\left(\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right)^2 d\varphi + \frac{EF}{2r^2}\int_0^l r\left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right)^2 d\varphi. \tag{7}$$

Si ha poi subito

$$L_a = \frac{1}{2}\int_0^l p\,\eta\,r\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^l q\,\xi\,r\,d\varphi \tag{8}$$

e quindi per la (1) dovrà aversi:

$$\frac{EJ}{2r^4}\int_0^l\left(\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right)^2 d\varphi + \frac{EF}{2r^2}\int_0^l\left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right)^2 d\varphi - \int_0^l p\,\eta\,d\varphi - \int_0^l q\,\xi\,d\varphi = \text{valore estremo}. \tag{9}$$

[1] Vedasi ad es. A. Föppl, Technische Mechanik, vol. III, pag. 188, ed. 4ª od anche Encyclopädie d. Mathematischen Wissenschaften, IV, 2, II, pag. 337.

Ora il calcolo delle variazioni insegna che perchè sia minimo o massimo l'integrale

$$\int_0^l \mathrm{F}\left(\eta, \frac{d\eta}{d\varphi}, \frac{d^2\eta}{d\varphi^2}, \dots \frac{d^n\eta}{d\varphi^n}, \xi, \frac{d\xi}{d\varphi}, \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}, \dots \frac{d^m\xi}{d\varphi^m}\right) d\varphi$$

devono esser soddisfatte le equazioni

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta} - \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta'} + \dfrac{d^2}{d\varphi^2}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta''} - \dots + (-1)^n \dfrac{d^n}{d\varphi^n}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta^{(n)}} = 0 \\ \text{e} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi} - \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi} + \dots + (-1)^m \dfrac{d^m}{d\varphi^m}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi^{(m)}} = 0, \end{cases}$$

dove con η' . η'' , ... $\eta^{(m)}$, ξ' , ξ'' , ... $\xi^{(m)}$ si indicano rispettivamente le derivate prima, seconda ..... n^{ma} , m^{ma} di η e di ξ rispetto a φ . Le costanti di integrazione che risultano dalla risoluzione delle (10) possono nel nostro caso determinarsi per mezzo di condizioni di posa o di simmetria senza che sia necessario aver ricorso alle equazioni ai limiti.

Avremo quindi per le (9) e (10)

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{EJ}}{r^4}\left(\dfrac{d^4\eta}{d\varphi^4} + 2\dfrac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right) - \dfrac{\mathrm{EF}}{r^2}\left(\dfrac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right) = p \\ \text{e} \\ -\dfrac{\mathrm{EF}}{r^2}\left(\dfrac{d^2\xi}{d\varphi^2} - \dfrac{d\eta}{d\varphi}\right) = q\,. \end{cases}$$

Eliminando la ξ fra la derivata prima delle (11) e la seconda di esse risulta

$$(12) \quad \frac{\mathrm{EJ}}{r^4}\left(\frac{d^5\eta}{d\varphi^5} + 2\frac{d^3\eta}{d\varphi^3} + \frac{d\eta}{d\varphi}\right) = \frac{dp}{d\varphi} - q$$

e sostituendo a $\dfrac{d\eta}{d\varphi}$ il valore che si ricava dalla seconda delle (11)

$$(13) \quad \frac{\mathrm{EJ}}{r^4}\left(\frac{d^6\xi}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4\xi}{d\varphi^4} + \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}\right) = \frac{dp}{d\varphi} - q - \frac{\varrho^2}{r^2}\left(\frac{d^4q}{d\varphi^4} + 2\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q\right)$$

dove si è fatto $\varrho^2 = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{F}}$.

La (12) e la (13) sono le equazioni trovate per altra via, con lunghi calcoli da Federhofer: per quanto esse appaiono a prima vista molto com-

plicate, pure nei casi della pratica si semplificano notevolmente (1). In particolare nel caso di condotte forzate soggette all'influenza del peso proprio del tubo e alla pressione di acqua scompare il terzo termine del secondo membro della (13) e si giunge ad un'equazione relativamente semplice, anche volendo tener conto delle dilatazioni dell'asse.

D'ordinario è possibile trascurare gli allungamenti dell'asse dell'anello. In questo caso si ha facendo $\varepsilon_0 = 0$, per la (5)

$$\eta = \frac{d\xi}{d\varphi}. \tag{14}$$

La prima delle (11) diviene perciò

$$\frac{EJ}{r^4}\left(\frac{d^4\eta}{d\varphi^4} + 2\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right) = p \tag{15}$$

equazione differenziale lineare del 4° ordine, con equazione caratteristica molto semplice, la quale riesce utile quando l'anello sia sottoposto a sole forze radiali.

La (14) introdotta nella (12) dà poi

$$\frac{EJ}{r^4}\left(\frac{d^6\xi}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4\xi}{d\varphi^4} - \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}\right) = \frac{dp}{d\varphi} - q \tag{16}$$

La (14) e la (16) sono le equazioni differenziali di un'asta ad asse circolare trovate da Lamb, studiando le piccole deformazioni dei solidi ad asse curvilineo (2).

Applichiamo i risultati precedenti al calcolo delle deformazioni di una condotta forzata orizzontale, posata lungo la generatrice infima e ripiena di acqua fino al vertice. Quando si trascuri di fronte all'unità il termine $\frac{1}{m^2}$, dove m è il coefficiente di Poisson, le equazioni ora trovate possono essere accettate.

Considerando come positive le forze dirette verso l'estremo della condotta, studiando l'equilibrio di un tronco lungo uno, misurando gli angoli a partire dalla verticale e assumendo come positivo il senso destrorso di rotazione si ha:

per la pressione idrostatica $p_1 = \omega r(1 - \cos\varphi)$

se con ω si indica il peso dell'acqua per unità di volume:

e per il peso proprio $p_2 = -\gamma s \cos\varphi$

$$q = -\gamma s \operatorname{sen}\varphi$$

(1) Cfr. Federhofer, *Theorie d. elastischen Kreisbogen* in Zeitschrift f. Architektur und Ingenieurwesen, 1910, col. 459 e *Zur Berechnung des Kreisringes*, ibid., 1912, pag. 303.

(2) Cfr. Lamb, *On the Flexure and the Vibrations of a curved Bar*. London Math. Society Proceedings, vol. 19, pag. 365 (1888).

dove γ è il peso specifico del materiale ed s lo spessore del tubo. Fatto

$$(\omega r + 2\gamma s)\frac{r^4}{EJ} = c$$

tanto la (13) quanto la (16) dànno

$$\frac{d^6\xi}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4\xi}{d\varphi^4} + \frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = c \operatorname{sen}\varphi . \tag{17}$$

In problemi di questa natura, quando il battente sul vertice della condotta è nullo può trascurarsi la dilatazione ε_0. Con questa ipotesi osservando che per

$$\varphi = 0 \qquad \xi = 0 \qquad \text{e T, sforzo di taglio} = 0$$

e per

$$\varphi = \pi \qquad \xi = 0 \qquad \text{ed } \eta = 0$$

e che inoltre la tangente nei punti $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ rimane orizzontale, si ha con facili riduzioni

$$\xi = \frac{c}{8}[4\varphi(1 + \cos\varphi) - (\pi^2 - \varphi^2)\operatorname{sen}\varphi]$$

ed

$$\eta = \frac{c}{8}[4(1 + \cos\varphi) - 2\operatorname{sen}\varphi - (\pi^2 - \varphi^2)\cos\varphi].$$

Le equazioni precedenti definiscono la linea elastica della condotta e i risultati di esse prendono forma semplicissima per i punti che inizialmente giacevano sopra i diametri orizzontale e verticale.

Lo spostamento del vertice della condotta è dato ad esempio, per le relazioni ora trovate, da

$$\eta_0 = \frac{c}{8}(8 - \pi^2) .$$

Le relazioni precedenti suppongono che la deformazione dell'anello non influisca sensibilmente sulla intensità e la direzione delle forze esterne. Questa ipotesi è sempre legittima quando gli spostamenti siano piccoli. I calcoli del prof. Guidi [1] mostrano come in pratica essa sia verificata quando le sollecitazioni del materiale siano inferiori al limite di elasticità. Solo in caso di anelli molto sottili e di conseguenza flessibilissimi i calcoli fatti più sopra cadono in difetto perchè le deformazioni e gli adattamenti dell'anello sotto l'azione delle forze esterne possono modificare sensibilmente le condizioni di equilibrio [2]

[1] Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1912-13.

[2] E. Winkler, nel 1860, aveva già notato questo fatto in un esteso studio sulla resistenza dei tubi e delle caldaie a vapore pubblicato nel Civilingenieur, vol. 6, col. 325 e 427. Si confrontino anche le critiche mosse dal Pearson ad alcuni dei risultati di queste ricerche nel II volume della History of the Theory of Elasticity, pag. 146 e seg.

Meccanica. — *Intumescenze e depressioni che dislivelli del letto determinano in un canale scoverto.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Ebbi già a caratterizzare (1) l'andamento del pelo libero, in un canale scoverto a fondo orizzontale e in regime permanente, quando in una determinata sezione trasversale, e per tutta la larghezza, è rigidamente saldata sul letto una traversa verticale (fig. 1).

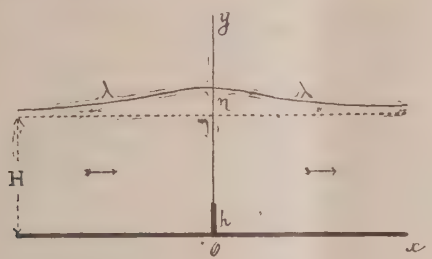

Fig. 1.

Più generalmente prendo ora in esame il caso in cui l'accidentalità del fondo è del tipo indicato in figura 2, essendo l'angolo α contato positivamente nel verso $x \longrightarrow y$, a partire dalla direzione positiva dell'asse x.

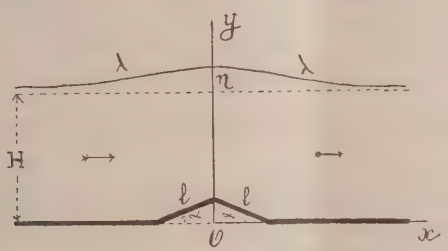

Fig. 2.

Il caso limite $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corrisponde manifestamente alla fig. 1. Anche in generale si rende visibile una *intumescenza del pelo libero* nella regione soprastante la irregolarità del fondo.

(1) *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Questi Rendiconti, 5 maggio 1912, pp. 588-593.

Il fenomeno si presenta alquanto differente quando il letto del canale è invece conformato come mostra la figura 3.

In luogo di una intumescenza si ha una *depressione del pelo libero*. Tuttavia, dal punto di vista analitico, basterà cambiare segno ad α per passare da un caso all'altro (1).

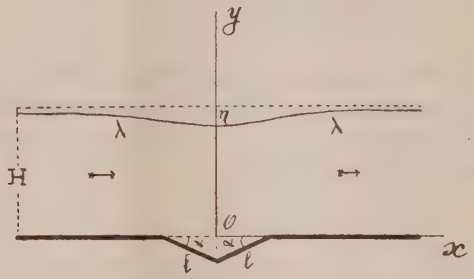

Fig. 3.

Come già feci rilevare nella Nota citata, il campo della gravità non reca sensibile influenza sul fenomeno se la velocità assintotica c della corrente è abbastanza rilevante rispetto a $\sqrt{2gh}$ (dove $h = l \operatorname{sen}\alpha$ e g è l'accelerazione di gravità) per cui del rapporto di quest'ultima alla prima si possono ritenere trascurabili le potenze superiori alla prima. Valendomi di questa favorevole circostanza mi propongo di assegnare l'integrale del moto della corrente, supposto permanente ed irrotazionale. La questione si può far rientrare in un problema già discusso (2), e condurla alle quadrature. La effettiva valutazione di queste quadrature presenta gravi difficoltà. Tuttavia nel caso, praticamente più interessante, in cui l'accidentalità del fondo è abbastanza poco rilevante rispetto alla profondità media del canale (H), per cui del rapporto $\frac{h}{H}$ sono da trascurarsi le potenze superiori alla seconda, si possono assegnare le espressioni definitive degli elementi salienti del fenomeno.

Così per il massimo distacco del pelo libero dal livello medio ($y = H$) [*altezza della intumescenza*, se α è *positivo*; *profondità della depressione*, se α è *negativo*] si ottiene l'espressione

$$(I) \qquad \eta = \frac{|\alpha| l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\pi H}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

(1) Va naturalmente escluso il caso $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

(2) Colonnetti, *Sul moto di un liquido in un canale*. Rend. Circ. Mat. di Palermo, 1911, tom. XXXII, pp. 51-87.

essendo Γ la nota funzione euleriana; mentre per il pelo libero si ha la equazione:

$$(II) \qquad y = H + \frac{\alpha l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\pi H}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 \operatorname{sech}\frac{\pi x}{2H},$$

il sistema di riferimento essendo quello indicato: nella figura 2 per α positivo, e nella figura 3 per α negativo.

Per $\alpha = 0$ si ha $\eta = 0$, $y = H$, come era evidente *a priori*. Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ritrovano i risultati della mia Nota citata.

L'andamento qualitativo del profilo libero richiama alla mente l'*onda solitaria*. Questa affinità, che si rivela analiticamente nella (II), si può rendere espressiva immaginando di imprimere a tutto il sistema liquido-letto del canale, una traslazione uniforme c *opposta* a quella della corrente. Si ottiene allora il problema (equivalente dal punto di vista analitico) del liquido stagnante perturbato dallo scorrimento del letto sopra se stesso. Se α è positivo, l'aspetto del fenomeno è una intumescenza unica che si propaga in seno al liquido con velocità c; se α è negativo si ha la propagazione (con velocità c) di una depressione.

Quest'ultimo caso realizza qualitativamente l'andamento dell'*onda solitaria negativa*.

1. Indicando, al solito, con u e v le componenti di velocità, φ e ψ il potenziale di velocità e la funzione di corrente, se si pone

$$(1) \qquad x + iy = z \quad , \quad u - iv = w \quad , \quad \varphi + i\psi = f,$$

w ed f risultano, com'è ben noto, funzioni di z, e sono legate fra loro dalla relazione

$$(2) \qquad \frac{df}{dz} = w.$$

Coi cambiamenti di variabile, definiti dalle posizioni

$$(3) \qquad z = z(f) \quad , \quad f = iH + \frac{2H}{\pi}\log\frac{1-\zeta}{1+\zeta},$$

e avendo assunto $= 1$, la velocità assintotica c, il campo del moto si può rappresentare, in modo conforme, nel semicerchio

$$|\zeta| = |\xi + i\eta| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 1 \quad , \quad \eta \geq 0 \ (^1).$$

(1) Cfr. Colonnetti, loc. cit., § 6.

Riferendoci a tale campo, la espressione seguente soddisfa a tutte le condizioni indefinite e di contorno:

$$(4) \qquad w = \left[\left(\frac{1-i\zeta}{1+i\zeta}\right)^2 \frac{(\zeta_1-\zeta)(\zeta-\zeta_2)}{(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_2\zeta)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}},$$

ζ_1 e ζ_2 essendo due punti della semicirconferenza $|\zeta| = 1$, $\eta \geq 0$, simmetrici rispetto all'asse immaginario (1).

Il punto del piano z da coordinare ad un ζ assegnato, rimane definito, per (2) e (3), dalla relazione:

$$(5) \qquad z = \int_{l \operatorname{sen}\alpha}^{\zeta} \frac{df}{w} =$$

$$= \frac{4H}{\pi} \int_{\zeta}^{l \operatorname{sen}\alpha} \left[\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)^2 \frac{(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_2\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(\zeta-\zeta_2)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2}.$$

Le formule (4) e (5) risolvono il problema in modo completo. In tal modo tutto è ridotto alla valutazione dell'integrale (5). Purtroppo in generale essa non si presenta punto agevole. Farò vedere tuttavia come sia possibile assegnare in modo esauriente l'andamento del pelo libero, quando l'accidentalità del letto è abbastanza piccola.

2. Per far descrivere all'ascissa z il pelo libero, bisogna che ζ percorra l'asse reale; in modo preciso: quando ζ varia da 1 fino a -1 si descriverà λ dall'infinito a monte fino all'infinito a valle. Poichè per $\zeta = 0$, si deve avere $x = 0$, avremo per un generico punto z del pelo libero

$$(6) \qquad z - iy_0 = \frac{4H}{\pi} \int_{\zeta}^{0} \left[\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)^2 \frac{(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_2\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(\zeta-\zeta_2)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2},$$

essendo ζ reale e compreso tra -1 e $+1$, e y_0 designando l'ordinata del punto di λ che corrisponde a $\zeta = 0$.

Indichiamo con σ_0 l'argomento di ζ_1, con che $\zeta_1 = e^{i\sigma_0}$ e $\zeta_2 = e^{i(\pi-\sigma_0)} = -e^{-i\sigma_0}$, e poniamo $\sigma_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, designando ε un numero di cui sono trascurabili le potenze superiori alla seconda. Se si nota che, in virtù di

(1) Cfr. Cisotti, *Vene fluenti*. Rendic. Circ. Mat. di Palermo (1908), tomo XXV, pag. 145 e seg., formula (37′), in cui si faccia $n = 4$, $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \alpha$, $\vartheta_3 = -\alpha$; oppure Colonnetti, loc. cit., formula (56).

questa ipotesi $\zeta_1 = i(1 - i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2)$, $\zeta_2 = i(1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2)$, la (6) diviene

$$z - iy_0 = \frac{4H}{\pi}\int_\zeta^0 \left\{1 + i\frac{2\alpha\varepsilon^2}{\pi}\frac{\zeta(1-\zeta^2)}{1+\zeta^2}\right\}\frac{d\zeta}{1-\zeta^2},$$

dalla quale integrando, ponendo $z = x + iy$ e separando la parte reale dalla immaginaria, si ottengono le equazioni parametriche del pelo libero,

$$(7)\qquad x = \frac{2H}{\pi}\log\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\ ,\quad y - y_0 = \frac{4H\alpha\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{1}{1+\zeta^2}\ ,$$
$$(-1 \leq \zeta \leq 1).$$

Le due costanti y_0 ed ε vanno valutate esprimendo le seguenti due condizioni: *a*) che dev'essere $y = H$ per $\zeta = \pm 1$; *b*) che $2l$ è la lunghezza del tratto non orizzontale del letto del canale (1). Si ottiene così:

$$(8)\qquad \begin{cases} y_0 = H - \dfrac{2\alpha H\varepsilon^2}{\pi^2}, \\ \varepsilon = \dfrac{\sqrt{\pi}\, l \operatorname{sen}\alpha}{2H}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\right)}, \end{cases}$$

essendo Γ la nota funzione euleriana.

(1) L'espressione dell'elemento lineare del piano z, cioè di $|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$, si può scrivere a norma di (2),

$$|dz| = \frac{|df|}{|w|}.$$

il secondo membro potendosi esprimere in funzione di ζ, a mezzo di (3) e (4). Ciò posto, colla voluta approssimazione si ha

$$l = \int |dz| = \frac{2H}{\pi}\int_0^\varepsilon \left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 - \sigma^2}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} d\sigma = \frac{H\varepsilon}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}}\,dt.$$

Questo integrale non è altro che [cfr. ad es. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Leipzig, 1906, pag. 133]

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)};$$

da ciò segue la seconda di (8).

Eliminando fra le (7) il parametro ζ e tenendo presenti le (8), si ha in definitiva l'equazione del pelo libero sotto la forma seguente:

$$(9) \qquad y = \mathrm{H} + \frac{\alpha l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 \operatorname{sech} \frac{\pi x}{2\mathrm{H}} .$$

Da questa scende che il massimo scostamento del pelo libero dal livello medio $y = \mathrm{H}$, è

$$(10) \qquad \eta = \frac{|\alpha| l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 .$$

Dalla seconda di (8), che definisce il significato di ε, si ha che *queste conclusioni sono applicabili tutte le volte che del rapporto* $\frac{h}{\mathrm{H}}$ *sono trascurabili le potenze superiori alla seconda, essendo* $h = l \operatorname{sen} \alpha$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{\alpha}$ è il rapporto delle due funzioni Γ eguale a $\sqrt{\pi}$, e le (9) e (10) vanno a coincidere colle (16) e (17) della mia Nota citata.

Matematica. — *Un'osservazione sulle serie di potenze.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Sia

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

una serie di potenze della variabile complessa r. In un punto regolare ζ, vale la relazione

$$(2) \qquad f(\zeta + h) = f(\zeta) + \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(\zeta) + h^r \omega ,$$

dove $f^{(r)}$ è la derivata d'ordine più basso che non sia nulla nel punto ζ, ed ω denota una quantità che tende a zero se h tende a zero. In ζ supponiamo f diversa da zero.

Risolviamo l'equazione binomia in h

$$(3) \qquad \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(\zeta) = \lambda f(\zeta) ,$$

dove λ sia un numero reale (positivo o negativo), tale da comportare un h

di così piccolo modulo che valga la (2): basterà che λ sia anch'esso di modulo sufficientemente piccolo.

Se h_1 è una radice della (3), sarà

$$f(\zeta + h_1) = f(\zeta)(1 + \lambda) + h_1^r \omega_1 . \tag{4}$$

Se ora ε denota un numero positivo sufficientemente piccolo, possiamo scrivere

$$f(\zeta + \varepsilon h_1) = f(\zeta)(1 + \varepsilon^r \lambda) + h_1^r \varepsilon^r \omega^\star , \tag{5}$$

dove $\omega^\star$ tende a zero se ε tende a zero. Per ε sufficientemente piccolo, noi possiamo, dunque, ritenere il modulo di $f(\zeta + \varepsilon h_1)$ maggiore del modulo di $f(\zeta)$, se λ è positivo; e minore, invece, se λ è negativo. Rimane, in ogni caso, stabilito che il modulo di $f(z)$ non può essere nè massimo nè minimo in un punto regolare, nel quale f non si annulli. Anche la parte reale di $f(z)$ può essere (in ogni punto ζ che sia regolare e che non sia radice per la funzione) aumentata o diminuita: dunque neanch'essa può ivi diventare massima o minima; ed altrettanto dicasi per la parte complessa.

Da questo semplicissimo risultato si ricava subito, in modo noto, il teorema d'esistenza delle radici di un polinomio. Si può inoltre dedurne un teorema di Liouville, che cioè una trascendente intera non può avere il suo modulo racchiuso in limiti fissi. Se, infatti, fosse, per assurdo, M un valore non superato dal modulo della trascendente intera

$$H(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots ,$$

allora il modulo di $\dfrac{H(z)}{z}$, cioè di

$$\frac{c_0}{z} + c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots ,$$

e quindi anche quello della serie di potenze

$$c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots , \tag{6}$$

tenderebbe a zero per z infinito. Ora la (6) ha, come è bene evidente, lo stesso raggio di convergenza di H; dunque è anch'essa una trascendente intera. Ma se è nulla all'infinito, dev'essere identicamente nulla, perchè, in caso contrario, il suo modulo avrebbe, al finito, qualche punto di massimo, il che è contro ciò che abbiamo stabilito.

Ho voluto, con brevi e noti metodi, giungere a noti ed importanti risultati, per far vedere come alcune questioni, che ordinariamente si ritengono superiori all'ingegno e alla cultura dei principianti, sono invece a portata di mano, purchè non siano oscurate da ragionamenti poco intelligibili.

Matematica. — *Sul problema degli isoperimetri.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

1 (1). Sia $F(x, y, x', y')$ la solita funzione del calcolo delle variazioni. Siano poi $P(x, y)$, $Q(x, y)$ due funzioni finite e continue nel campo A in cui è data (rispetto alle x, y) la F.

Consideriamo un campo A_0, limitato e chiuso, formato di punti *interni* ad A, e la classe K di tutte le curve C, continue, rettificabili, di A_0, soddisfacenti a certe condizioni, che siano però tali da risultare soddisfatte anche per ogni ente limite di curve di K (così ogni ente limite, se è rettificabile, appartiene necessariamente a K).

Vogliamo dimostrare la seguente proposizione:

Se è, per ogni punto (x, y) *di* A_0 *e per ogni coppia* (x', y') *di numeri finiti non nulli insieme,* $F > 0$, $F_1 \geq$ (2) *allora, fra tutte le curve* C *di* K *per le quali l'integrale*

$$I_C = \int_C \{P(x, y)\, x' + Q(x, y)\, y'\}\, ds = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

assume un valore costante l, *ve n'è almeno una che rende minimo l'altro integrale*

$$J_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds \quad (3).$$

(1) Per semplicità considereremo qui solo curve piane, ma le cose che diremo valgono senz'altro anche per le curve dello spazio: basta per questo tener presente quanto si è stabilito al § IV della nostra Memoria: *Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni* (Rendic. Circolo Mat. Palermo, 1913). Tale lavoro nel seguito verrà indicato con (T).

(2) $F_1(x, y, x', y')$ indica il solito invariante di Weierstrass

(3) Questo teorema, insieme a quello del n. 6, fu trovato per altra via da Hadamard (*Sur quelques questions de calcul des variations*, Annales Scientifiques de l'École Norm. Sup., 1907) sotto le seguenti ipotesi: *a*) K è la classe di tutte le curve rettificabili contenute in un dato campo e congiungenti due dati punti, oppure chiuse in se stesse; *b*) il campo è *extremal-kouvex* o, per lo meno, tale che le curve *minimum* da stabilirsi risultino *a priori* interne ad esso; *c*) è $F > 0$, $F_1 > 0$; *d*) P e Q hanno derivate parziali, prime e seconde, continue, ed è, in ogni punto del campo $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Dalla dimostrazione stessa dell'Hadamard, risulta poi che le curve *minimum* sono estremali.

2. Per la dimostrazione è necessario premettere il

LEMMA. — *L'integrale* I *è una funzione continua della linea di integrazione, se tal linea rimane sempre, in lunghezza, minore di un numero fisso.*

Da quanto si è stabilito al n. 10 di (T), risulta che, se una curva variabile C_1, costantemente inferiore, in lunghezza, ad un numero fisso, tende all'altra C, ed è sempre $F_1 = 0$, allora, preso un η positivo, arbitrario, da un certo punto in poi la C_1 soddisfa alla disuguaglianza

$$\left| \int_C F\,ds - \int_{C_1} F\,ds \right| < \eta .$$

E poichè nel caso attuale abbiamo al posto della F la $P(x,y)\,x' + Q(x,y)\,y'$, la condizione $F_1 = 0$ è soddisfatta, e il lemma resta stabilito.

Si potrebbe però giustamente obbiettare che mentre la funzione F, per la quale fu dimostrato il teorema di cui qui abbiamo fatto uso, deve avere le derivate parziali dei primi tre ordini, finite e continue, sulle P e Q noi abbiamo fatto semplicemente l'ipotesi della sola continuità. Ma l'obiezione si rimuove del tutto sostituendo alle funzioni P e Q due polinomî $P_n(xy)$, $Q_n(xy)$ che le rappresentino a meno di un ε arbitrario.

3. Dopo ciò, possiamo venir subito alla dimostrazione del teorema enunciato al n. 1.

Nella sotto classe $\overline{K}$ delle curve di K che soddisfano alla condizione $I = l$, l'integrale J ha un limite inferiore che indicheremo con j. Sia C_1, C_2, ..., C_n, ... una successione di curve $\overline{K}$ tale che si abbia $\lim_{n=\infty} J_{C_n} = j$. Per la continuità della F, si può fissare un numero $m > 0$ in modo che, in tutto A_0 per qualsiasi coppia (x', y') di numeri soddisfacenti alla relazione $x'^2 + y'^2 = 1$, sia $F > m$. Le lunghezze $\mathfrak{L}_n$ delle C_n — avendosi $J_{C_n} \geq \mathfrak{L}_n \cdot m$ e, di conseguenza, Mass. lim $\mathfrak{L}_n \leq \frac{j}{m}$ — rimangono perciò tutte inferiori ad un numero determinabile L. Le C_n ammettono allora, per un ben noto teorema almeno una curva limite C, anch'essa inferiore in lunghezza a L ed appartenente a K. Per il lemma del n. 2, è poi, essendo, qualunque sia n, $I_{C_n} = l : I_C = l$. Questa C appartiene dunque anche a $\overline{K}$. M è (n. 10 di (T)) $J_C \leq$ Min. lim $J_{C_n} =$ lim $J_{C_n} = j$. Poichè C appartiene a $\overline{K}$, non può essere $J_C < j$; è dunque $J_C = j$, e la C dà il minimo che volevasi stabilire.

4. Supponiamo che la classe K sia tale — K' — che, preso un arco qualsiasi di una sua curva C, del tutto *interno* ad A_0, si possa sempre determinarne un intorno, in modo che, variando l'arco con un altro qualsivoglia di detto intorno, non si esca dalla classe (1). Una simile condizione

(1) Veramente, per il seguito, basterebbe che la cosa fosse verificata solo per quelle variazioni che non alterano il valore dell'integrale I.

è, per esempio, verificata se K è la classe di *tutte* le curve rettificabili di A_0 congiungenti due dati punti o due date linee, ed anche se è quella di *tutte* le curve rettificabili di A_0 che contengono o circondano i punti di un dato insieme chiuso (1). Facciamo, inoltre, l'ipotesi che le funzioni P e Q ammettano delle derivate parziali del primo ordine, finite e continue, e che, in ciascun punto (x, y) di A_0, le coppie (x', y') che soddisfano all'uguaglianza $F_1(x, y, x', y') = 0$ non riempian mai alcun arco del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$. Ciò posto, sia (α, β) un arco, completamente *interno* ad A_0, di una delle curve *minimum*, dell'esistenza delle quali ci siamo occupati ai numeri precedenti.

Si possano presentare due casi, a seconda che su (α, β) è nulla o no la variazione prima dell'integrale I. Nel primo di essi, si ha, essendo s_0 e s_1 i valori dell'arco s corrispondenti agli estremi di (α, β),

$$\int_{s_0}^{s_1} \{(P_x x' + Q_x y')\, p + (P_y x' + Q_y y')\, q + P p' + Q q'\}\, ds\,,$$

qualunque siano le funzioni $p(s)$, $q(s)$ (continue insieme alle loro derivate prime), sottoposte solo alla condizione di annullarsi per $s = s_0$ e $s = s_1$. Da qui scende che deve aversi, separatamente,

$$\int_{s_0}^{s_1} \{(P_x x' + Q_x y')\, p + P p'\}\, ds = 0\ ,\ \int_{s_0}^{s_1} \{(P_y x' + Q_y y')\, q + Q q'\}\, ds = 0\,.$$

Procedendo col metodo conosciuto di Du Bois-Reymond, si giunge a stabilire che, essendo c_1 e c_2 due determinate costanti, le equazioni

$$P - \int_{s_0}^{s} \{P_x x' + Q_x y'\}\, ds = c_1\ ,\quad Q - \int_{s_0}^{s} \{P_y x' + Q_y y'\}\, ds = c_2$$

devono essere soddisfatte in tutti i punti di (α, β) ad eccezione al più di un insieme di misura nulla (2). Ma essendo le varie parti che entrano in queste equazioni tutte funzioni continue della s, ne viene che le equazioni stesse devono essere soddisfatte su tutto l'arco (α, β). Se ne trae, ad eccezione al più di un insieme di misura nulla,

$$P_x x' + P_y y' - (P_x x' + Q_x y') = 0\ ,\ Q_x x' + Q_y y' - (P_y x' + Q_y x') = 0$$

$$P_y = Q_x\,: \tag{1}$$

la quale ultima uguaglianza, per la continuità delle derivate P_y, Q_x, deve essere effettivamente verificata su tutto (α, β).

(1) In questo secondo caso però i punti dell'insieme andrebbero riguardati come facenti parte del contorno di A_0.

(2) Una dimostrazione analoga a questa, e sviluppata per disteso, trovasi nel mio lavoro *Sulle soluzioni discontinue del calcolo delle variazioni*, di prossima pubblicazione.

Nel secondo caso, quando cioè la variazione prima dell'integrale I non è nulla, deve essere, se poniamo $H = F + \lambda(Px' + Qy')$ ($\lambda =$ costante isoperimetrica),

$$\int_{s_0}^{s_1} (H_x p + H_y q + H_{x'} p' + H_{y'} q')\, ds = 0,$$

ossia, ragionando come sopra,

$$(2) \qquad H_{x'} - \int_{s_0}^{s} H_x\, ds = c_1 \quad , \quad H_{y'} - \int_{s_0}^{s} H_y\, ds = c_2,$$

uguaglianze che devono risultare soddisfatte in tutti i punti di (α, β) ad eccezione al più di un insieme di misura nulla. Sia E l'insieme (di misura nulla) di quei punti di (α, β) nei quali le derivate x'_s, y'_s o mancano o non soddisfano alla $x'^2 + y'^2 = 1$, e di quegli altri nei quali non è soddisfatta la prima (p. es.) delle due equazioni precedenti. Sia poi C(E) il complementare di E in (α, β).

Nei punti di C(E) esiste allora la tangente alla curva, e se indichiamo con $\theta(s)$ l'angolo, compreso fra 0 e 2π (2π escluso), che la sua direzione positiva forma con quella positiva dell'asse x, abbiamo $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \operatorname{sen}\theta(s)$, e sempre, in tutti i punti di C(E), sarà soddisfatta l'uguaglianza

$$(3) \qquad Hx'(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) - \int_{s_0}^{s} H_x(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, ds = c_1.$$

Sia ora P un punto qualunque di E. Per essere E di misura nulla, potremo scegliere una successione $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ di punti di C(E), tendenti a P. Indichiamo con θ_n l'angolo relativo alla tangente alla curva in P_n, e dimostriamo che esiste il $\lim_{n=\infty} \theta_n$ (1). Se, infatti, ciò non fosse, si potrebbero estrarre dalla successione delle θ_n altre due successioni $\theta_{n_r}, \theta_{n_s}$ ($r, s = 1, 2, \ldots$) aventi limiti ben determinati e distinti $\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}}$, rispettivamente. E poichè la (3) è sempre verificata su C(E), si avrebbe, indicando con s_{n_r}, s_{n_s} i valori di s corrispondenti a $\theta_{n_r}, \theta_{n_s}$,

$$H_{x'}(x(s_{n_i}), y(s_{n_i}), \cos\theta_{n_i}, \operatorname{sen}\theta_{n_i}) - \int_{s_0}^{s_{n_i}} H_x\, ds = c_1 \ , \ (i = r, s)$$

e quindi anche, se $\bar{s}$ è il valore di s relativo a P,

$$H_{x'}(x(\bar{s}), y(\bar{s}), \cos\bar{\theta}, \operatorname{sen}\bar{\theta}) - \int_{s_0}^{\bar{s}} H_x\, ds = c_1,$$

$$H_{x'}(x(\bar{s}), y(\bar{s}), \cos\bar{\bar{\theta}}, \operatorname{sen}\bar{\bar{\theta}}) - \int_{s_0}^{\bar{s}} H_x\, dx = c_1,$$

(1) Diciamo che esiste il limite delle θ_n anche se alcune di esse tendono a 0 ed altre a 2π; e diciamo, in tal caso, che il limite comune è 0.

donde

$$H_{x'}(x(\bar{s}), y(\bar{s}), \cos\bar{\theta}, \operatorname{sen}\bar{\theta}) = H_{x'}(x(\bar{s}), y(\bar{s}), \cos\bar{\bar{\theta}}, \operatorname{sen}\bar{\bar{\theta}}).$$

Considerando allora la $H_{x'}(x, y, \cos\gamma, \operatorname{sen}\gamma)$ come funzione della sola γ. si avrebbe

$$H_{x'\gamma} = -H_{x'x'}\operatorname{sen}\gamma + H_{x'y'}\cos\gamma =$$
$$= -F_{x'x'}\operatorname{sen}\gamma + F_{x'y'}\cos\gamma = -\operatorname{sen}\gamma\, F_1(x, y, \cos\gamma, \operatorname{sen}\gamma),$$

e poichè la $F_1(x, y, \cos\gamma, \operatorname{sen}\gamma)$, per ipotesi, è sempre ≥ 0 e, come funzione della sola γ non può essere costantemente nulla in nessun tratto, se ne dedurrebbe l'annullamento di $\sin\gamma$ nell'*interno* dell'intervallo $(\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}})$, vale a dire, che dovrebbe essere $0 \leq \bar{\theta} < \pi < \bar{\bar{\theta}} < 2\pi$ oppure $0 \leq \bar{\bar{\theta}} < \pi < \bar{\theta} < 2\pi$. Ma osserviamo che, facendo ruotare gli assi coordinati di un angolo α, gli angoli $\theta'_{nr}, \theta'_{ns}$ che sostituirebbero θ_{nr}, θ_{ns} (1) dovrebbero tendere rispettivamente a $\bar{\theta}', \bar{\bar{\theta}}'$ — con $\bar{\theta}' = \bar{\theta} - \alpha$ oppure $= \bar{\theta}' - \alpha + 2\pi$, e $\bar{\bar{\theta}}' = \bar{\bar{\theta}} - \alpha$ oppure $= \bar{\bar{\theta}} - \alpha + 2\pi$ — e dovrebbe ancora aversi $0 \leq \bar{\theta}' < \pi < \bar{\bar{\theta}}' < 2\pi$ oppure $0 \leq \bar{\bar{\theta}}' < \pi < \bar{\theta}' < 2\pi$; mentre, scegliendo opportunamente α, sarebbe sempre possibile far in modo che ciò non avvenisse (2). Se ne conclude che non è possibile che esistano i due limiti distinti $\bar{\theta}$ e $\bar{\bar{\theta}}$, e che invece esiste un unico limite per le θ_n. Abbiamo così che, quando un punto arbitrario di C(E) tende al punto P di E, il corrispondente angolo θ tende ad un limite determinato ed unico. Se tal limite lo assumiamo come valore di θ in P, abbiamo la funzione $\theta(s)$ definita in tutti i punti di (α, β), funzione che risulta continua in tutti i punti di E. Ma se nel ragionamento fatto or ora, sostituiamo al punto P di E un punto qualunque di C(E), otteniamo che il $\lim\theta_n$ è precisamente il valore di θ relativo al punto stesso. La funzione $\theta(s)$ è dunque continua in tutto (α, β), e tali sono pure, di conseguenza, $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$. Ma in tutti i punti di (α, β), ad eccezione al più di un insieme di misura nulla, è $x' = \cos\theta$, $y' = \operatorname{sen}\theta$; si ha perciò che le $x(s), y(s)$, essendo gli integrali di $\cos\theta(s)$, $\operatorname{sen}\theta(s)$, ammettono in tutto (α, β) delle derivate continue, date rispettivamente da $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$.

Le equazioni (2) sono allora soddisfatte su tutto (α, β), e su tutto tale arco sono pure soddisfatte le equazioni differenziali di Eulero

$$\frac{dH_{x'}}{ds} - H_x = 0 \quad , \quad \frac{dH_{y'}}{ds} - H_y = 0 \tag{4}$$

In ogni punto poi dove è $F_1 > 0$ esistono anche finite e continue le x'' e y''.

(1) Si avrebbe $\theta'_{n_r} = \theta_{n_r} - \alpha$ oppure $= \theta_{n_r} - \alpha + 2\pi$ e così per θ'_{n_s}.

(2) Se fosse, per es., $0 \leq \bar{\theta} < \pi < \bar{\bar{\theta}} < 2\pi$, basterebbe prendere $\alpha = \bar{\theta}$, nel caso che si avesse $\bar{\bar{\theta}} - \bar{\theta} \leq \pi$, e $\alpha = \bar{\bar{\theta}}$, nel caso contrario.

Concludiamo dunque che, *nelle ipotesi qui poste, ogni arco della curva minimum, completamente interno al campo* A_0, *soddisfa o all'equazione* (1) *o al sistema* (4) (il primo caso non escludendo però il secondo). È a notare che se l'arco $(\alpha\beta)$ soddisfa alla (1), ma appartiene ad un altro arco $(\alpha'\beta')$, anch'esso tutto interno ad A_0, e non soddisfacente per intero alla (1), allora il primitivo $(\alpha\beta)$ soddisfa pure al sistema (4); e la stessa cosa vale se (α, β) è interno ad una regione, per ogni punto della quale sia sempre verificata la (1). Si hanno poi i seguenti corollari: a) *se l'uguaglianza* (1) *è soddisfatta solo in punti che non riempiono mai alcun arco di curva, allora ogni arco di curva minimum, interno ad* A_0, *soddisfa interamente alle* (4); b) *se nessuna curva di K' soddisfa interamente alla* (1) *e la curva minimum è tutta interna ad* A_0, *allora essa soddisfa per intero alle* (4) [1].

5. Con metodo perfettamente identico a quello usato ai nn. 19 e 20 di (T), e tenendo conto del lemma qui stabilito, si dimostra il teorema di Osgood nei due casi seguenti. Siano le ipotesi del teorema del n. 1, e $\overline{C}$ una delle curve *minimum* ivi stabilite. Inoltre, per ogni altra curva C di K, appartenente propriamente [2] ad un certo intorno della $\overline{C}$ e per la quale sia $I_C = l$, si abbia (5) $J_C - J_{\overline{C}} > 0$. *È allora possibile determinare un intorno* (ϱ) *di* $\overline{C}$ *in modo che, ad ogni* $\varrho_1 < \varrho$ *corrisponda un numero* $\mu > 0$, *il quale soddisfi alla disuguaglianza* $J_C - J_{\overline{C}} > \mu$ *per ogni curva* C di K, *soddisfacente alla* $I_C = l$, *appartenente propriamente all'intorno* (ϱ) *di* $\overline{C}$, *e avente almeno un punto esterno all'intorno* (ϱ_1). Se si sopprime la condizione $F > 0$ e si sostituisce l'altra $F_1 \geq 0$ con la $F_1 > 0$, e si sa che per tutte le curve C di K, che appartengono propriamente ad un certo intorno della $\overline{C}$ e che soddisfano alla $I_C = l_{\overline{C}}$, è verificata la (5), allora il teorema precedente continua a sussistere.

6. Sia K_1 una classe K (n. 1) di curve, la quale sia tale che ad ogni suo elemento si possa aggiungere un arco di lunghezza arbitraria e percorso due volte, in senso contrario, senza uscire con ciò dalla classe stessa. Allora, presupponendo per le P, Q, la sola continuità, abbiamo: *Se è, per ogni punto di* A_0 *e per ogni coppia* (x', y') *di numeri finiti non nulli insieme,* $F > 0$, $F_1 \geq 0$, *fra tutte le curve di* K_1 *per le quali l'integrale* J *assume un valore costante* l, *ve n'è almeno una che rende minimo (massimo) l'integrale* I. Sia $\overline{K}$, la sottoclasse di tutte le curve di K_1 per le quali

[1] La condizione che la curva *minimum* sia tutta interna ad A_0 non è difficile che si possa stabilire a *priori*. Ciò avviene, per es., nel problema del minimo perimetro che racchiude una data area, e in varî altri. Si noti che la conclusione del corollario b) rimane giusta anche se esistono delle curve di K' che verificano per intero le (1), purchè per esse non sia $I = l$.

[2] Per la definizione di curve *appartenenti propriamente* ad un certo intorno di un'altra curva, vedi (Γ), n. 9.

è $J = l$: le curve di $\overline{K}_1$ risultano tutte in lunghezza inferiori ad un numero fisso, e se C_n ($n = 1, 2, \ldots$) è una successione di esse, scelta in modo che sia $\lim I_{C_n} =$ al limite inferiore (superiore) dei valori di I in $\overline{K}_1$, da C_n se ne può estrarre un'altra C_{n_r} che tenda ad una curva limite $\overline{C}$. Questa curva deve appartenere a K_1, e per il teorema del n. 2. rende I uguale al limite inferiore (superiore) detto sopra. Per la semicontinuità inferiore di J, è poi $J_{\overline{C}} \leq \text{Min. lim } J_{C_{n_r}} = l$. Se qui vale l'uguaglianza, il teorema proposto è già dimostrato; altrimenti, si aggiunga alla $\overline{C}$ un arco di lunghezza conveniente in modo che, percorso due volte, in senso opposto, dia all'integrale J, esteso alla nuova curva risultante $\overline{\overline{C}}$, precisamente il valore l, ed in modo anche che tal nuova curva appartenga a K_1. È allora $J_{\overline{\overline{C}}} = l$, $I_{\overline{\overline{C}}} = J_C$, e si ha così il minimo (massimo) richiesto.

7. Consideriamo, come al n. 4, una classe K' tessa è necessariamente anche una classe K_1) e supponiamo l'esistenza e la continuità delle derivate parziali prime di P e Q, e che le coppie (x', y') che annullano F_1 non riempian nessun arco del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$, quando si tenga fisso il punto (xy) di A_0. Con procedimento analogo a quello del numero ricordato, si stabilisce che *ogni arco di una curva minimum (maximum), completamente interno ad* A_0, *soddisfa interamente ad almeno uno dei due sistemi di equazioni differenziali di Eulero* (4) relativi, uno alla funzione F, e l'altro alla $\overline{H} = \overline{\lambda} F + (Px' + Qy')$ ($\overline{\lambda}$ = costante isoperimetrica).

8. Nelle ipotesi del teorema del n. 6, e con l'aggiunta dell'altra, che ogni curva C di K_1, appartenente propriamente ad un certo intorno della curva minimum (maximum) $\overline{C}$ e soddisfacente alla $J_C = l$, verifichi la disuguaglianza $I_C - I_{\overline{C}} > 0$ (< 0), si dimostra il teorema di Osgood, analogamente a quanto si è stabilito al n. 5.

Fisica. — *Nuove ricerche sul calore specifico dei metalli a temperature elevate.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In alcune Note (1), che mi onorai di comunicare l'anno scorso all'Accademia, dopo di aver dedotto teoricamente la legge di variazione della temperatura di un filamento percorso da corrente qualora si modifichi di poco la resistenza totale del circuito, esposi una particolare disposizione del ponte di Wheatstone per mezzo della quale potei valutare con semplici misure galvanometriche la capacità calorifica del filamento. L'applicazione allo studio del tungsteno, di cui fu misurato il calore specifico fino a 2000°, mi permise di giungere a conclusioni notevoli, che consigliarono l'estensione della ricerca ad altri metalli.

(1) Corbino, Rend. Lincei, vol. XXI, 1° sem., pag. 181, 1912.

Un lavoro recentissimo del Pirani che, pur confermando i miei risultati, utilizza dei metodi certo meno suscettibili di esattezza, non toglie interesse alle esperienze che avevo già iniziate e che ho adesso espletato per fili di platino. Mi propongo di comunicare in questa Nota la disposizione generale delle nuove esperienze, riservandomi di farne noti i risultati in una Nota successiva.

Per sottoporre alla ricerca fili di diversa natura fu anzitutto necessario sostituire alla lampadina ordinaria a incandescenza un recipiente nel quale si potesse introdurre e cambiare a volontà i filamenti e che permettesse di estrarre l'aria fino a rarefazioni molto elevate. Fu perciò utilizzato un recipiente cilindrico, chiuso alla parte inferiore, e portante nella larga apertura superiore un tappo smerigliato, con la possibilità di migliorare la chiusura per mezzo di un canale contenente mercurio. Attraverso al tappo e ad esso saldati passano due fili ai quali vien fissato il filamento per mezzo del mastice in ossido d'argento ed essenza di lavanda. Il filamento, piuttosto lungo, è tenuto solo agli estremi e di là pende liberamente, cosicchè l'influenza dei sostegni è ridotta al minimo. Un tubo laterale serve per la connessione alla pompa Gaede e a un manometro per alte rarefazioni. Lasciando in funzione la pompa fu possibile garantire, con fili portati ad alta incandescenza, una rarefazione dell'ordine di 1/10.000 di millimetro.

La disposizione elettrica comprende alcune modificazioni essenziali a quella già usata nelle mie ricerche precedenti. E invero, poichè il passaggio della temperatura del filo da T_0 a $T_0 + \Theta$ si compie secondo una esponenziale, rispetto al tempo, il cui coefficiente è molto alto solo quando la temperatura T è assai elevata (col tungsteno il coefficiente in parola si abbassava da circa 20 a 1,5 quando la temperatura iniziale T si andava variando da 2000° a 800°) la misura col galvanometro balistico della quantità di elettricità traversante il ponte nella fase di squilibrio non riusciva agevole a temperature più basse, e molto meno con fili di capacità calorifica maggiore.

Ho ricorso quindi alla seguente disposizione alquanto diversa. Il filamento F fa parte di un ordinario parallelogramma di Wheatstone; alla corrente i che lo traversa corrisponde una temperatura T_0 e una resistenza r_0; tutto è disposto perchè il galvanometro G non sia percorso da corrente. Sopprimendo bruscamente con un corto circuito la resistenza ΔR nel circuito principale, aumenta la corrente nel filamento, e la sua temperatura subisce una variazione progressiva che è legata alla variazione finale Θ secondo la formola

$$\vartheta = \Theta e^{-mt},$$

dove t è il tempo,

(1) $$m = \frac{P}{c : a},$$

e P il coefficiente di ϑ nella equazione differenziale che regge il fenomeno. Questa equazione, nel caso di un semplice circuito del quale fa parte il filamento e la resistenza zavorra R è la seguente:

$$\frac{c}{a}\frac{d\vartheta}{dt} + P\vartheta = 2\frac{W}{a}\frac{\Delta R}{r_0 + R},$$

dove P si può calcolare nel modo da me allora riferito e gli altri simboli hanno il significato allora esposto. Nel caso attuale, poichè la variazione ΔR della resistenza ha luogo nel circuito della pila, prima del parallelogrammo, l'equazione è alquanto diversa. Infatti, prima della soppressione ΔR, ponendo (fig. 1)

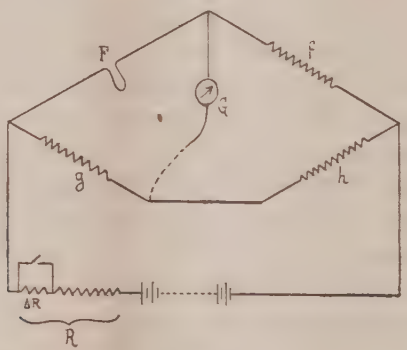

Fig. 1.

$$\frac{h}{f} : \left(1 + \frac{h}{f}\right) = \alpha$$

si ha

$$W = F(T_0) = \frac{e^2 r_0}{[R + (r_0 + f)\alpha]^2}.$$

Dopo la soppressione di ΔR si ha invece

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + F(T_0 + \vartheta) = \frac{e^2 r_0(1 + a\vartheta)}{\{R - \Delta R + [r_0(1 + a\vartheta) + f]\alpha\}^2},$$

e da queste seguendo il procedimento allora indicato si deduce

$$\frac{c}{a}\frac{d\vartheta}{dt} + P\vartheta = 2\frac{W}{a}\frac{\Delta R}{R + (r_0 + f)\alpha}, \tag{2}$$

dove

$$P = W\frac{(r_0 - f)\alpha - R}{(r_0 + f)\alpha + R} + \frac{1}{a}\frac{dW}{dT}. \tag{3}$$

Finchè R è molto piccolo, come avveniva nelle precedenti esperienze, il valore di P può essere calcolato con la primitiva formola. In generale si

può avere però bisogno di ricorrere alla formola completa; e questo è il caso nella presente ricerca.

Alla variazione ϑ della temperatura del filamento corrisponde una corrente nel galvanometro data da

$$i_g = \mathrm{I}_g\, e^{-mt},$$

dove I_g denota il valore finale quando il filo ha raggiunto la nuova temperatura Θ e la nuova resistenza $r_0 + \Delta r_0$. Basterà quindi registrare i_g con un galvanometro conveniente per dedurre dal diagramma il coefficiente m. Si ha d'altra parte dalla (1)

$$\frac{c}{a} = \frac{\mathrm{P}}{m}.$$

Ma P si deduce facilmente oltre che dalla formola (3) anche dalla equazione (2) valida fino al raggiungimento asintotico della temperatura finale Θ, nel qual caso

$$\mathrm{P}\Theta = 2\,\frac{\mathrm{W}}{a}\,\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R} + (f + r_0)\,\alpha}.$$

E poichè

$$\Delta r_0 = r_0\, a\, \Theta$$

sostituendo si avrà

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{W}\,\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R} + (f + r_0)\,\alpha} : \frac{\Delta r_0}{r_0}$$

e quindi

$$\frac{c}{a} = 2\,\frac{\mathrm{W}}{m}\,\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R} + (r_0 + f)\,\alpha} : \frac{\Delta r_0}{r_0}.$$

Il valore di Δr_0 si misura facilmente cercando le nuove condizioni di equilibrio del ponte, in modo però da non modificare l'intensità della corrente che traversa il filamento; è facile perciò calcolare c/a o anche $c : \frac{dr}{d\mathrm{T}}$ essendo

$$a = \frac{1}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\mathrm{T}}.$$

Si ottiene così, dappoichè

$$\mathrm{W} = i^2 r_0,$$

$$c : \frac{dr_0}{d\mathrm{T}} = \frac{2i^2}{m}\,\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R} + (f + r_0)\,\alpha} : \frac{\Delta r_0}{r_0}. \qquad (4)$$

La misura meno consueta è solo quella di m. Mi son servito per questo d'un galvanometro a fibra costruito dalla Cambridge Instrument Co.,

adattandovi un dispositivo ottico che permetteva di registrare su una pellicola fotografica avvolta su un tamburo il movimento della fibra. Il tamburo ruotava dentro una scatola provveduta di una stretta fessura, per mezzo della quale solo una striscia sottilissima della pellicola, normale alla immagine della fibra, veniva impressionata quando quella era ferma. Col movimento del tamburo la deviazione della fibra dava luogo sulla pellicola a una fascia curvilinea di cui uno degli orli veniva utilizzato per le misure. Un *diapason* vibrante, munito di una punta d'ago sottile, dava per ombra sulla pellicola in moto una sinusoide, che segnava sul diagramma la misura del tempo.

Disgraziatamente in questi apparecchi galvanometrici non c'è proporzionalità tra la deviazione della fibra e la corrente che la produce; e inoltre gli scarti molto forti dalla legge di proporzionalità variano notevolmente col modificare la tensione della fibra. Fu perciò necessario in ciascun diagramma tracciare, oltre alla curva da studiare, un sistema di fasce, a fibra ferma, ottenute alterando l'equilibrio del ponte col modificare in modo misurato il rapporto delle resistenze di due branche adiacenti; rimaneva invariata la resistenza totale e così non si alterava l'intensità della corrente nel filamento e quindi la sua resistenza.

L'andamento d'una esperienza era il seguente. Chiusa la corrente principale, si teneva in azione la pompa Gaede, per lasciare costante la rarefazione, malgrado il riscaldamento del filo. La pressione si manteneva così inferiore a 1/10000 di millimetro, e costante. Dopo circa mezz'ora, necessaria perchè tutte le resistenze assumessero un valore definitivo, e la batteria di accumulatori si portasse a una tensione costante, si verificavano ed eventualmente si ripristinavano le condizioni di equilibrio del ponte. La connessione tra le branche $g\ h$ era fatta attraverso a un filo d'argentana di circa 50 cm. sul quale poteva scorrere un contatto di presa per uno dei capi del galvanometro. Si aveva così la possibilità di alterare l'equilibrio del ponte, dopo averlo raggiunto in stato di regime, senza modificare le resistenze totali dei due tratti $F\ f$, $g\ h$ e quindi senza modificare l'intensità della corrente e la resistenza del filamento.

Sopprimendo la resistenza ΔR con un corto circuito, la temperatura del filo si elevava progressivamente, e una corrente di andamento esponenziale percorreva il galvanometro, registrandosi sulla pellicola fotografica del tamburo in movimento. Intercettato il fascio di luce per qualche tempo, quanto ne occorreva perchè la temperatura del filo assumesse il nuovo valore definitivo, si producevano spostamenti misurati del contatto sul filo-ponte, per tre lunghezze uguali; ogni volta la fibra assumeva una posizione stabile indietreggiando dalla posizione anteriore; e in quelle posizioni, occultando con una fessura verticale l'intero fascio luminoso e lasciando scoperto un bordo della fibra, si producevano tre nuove impressioni sulla pellicola. Così su questa si disegnava una fascia ad andamento esponenziale, che corrispon-

deva alla prima manovra, e tre fasce rettilinee parallele all'asse dei tempi, che *col loro orlo inferiore* disegnavano la traccia della fibra in corrispondenza di tre variazioni note nel rapporto delle resistenze g e h. Si ebbero così i diagrammi della fig. 2 che si riferiscono a diverse temperature ini-

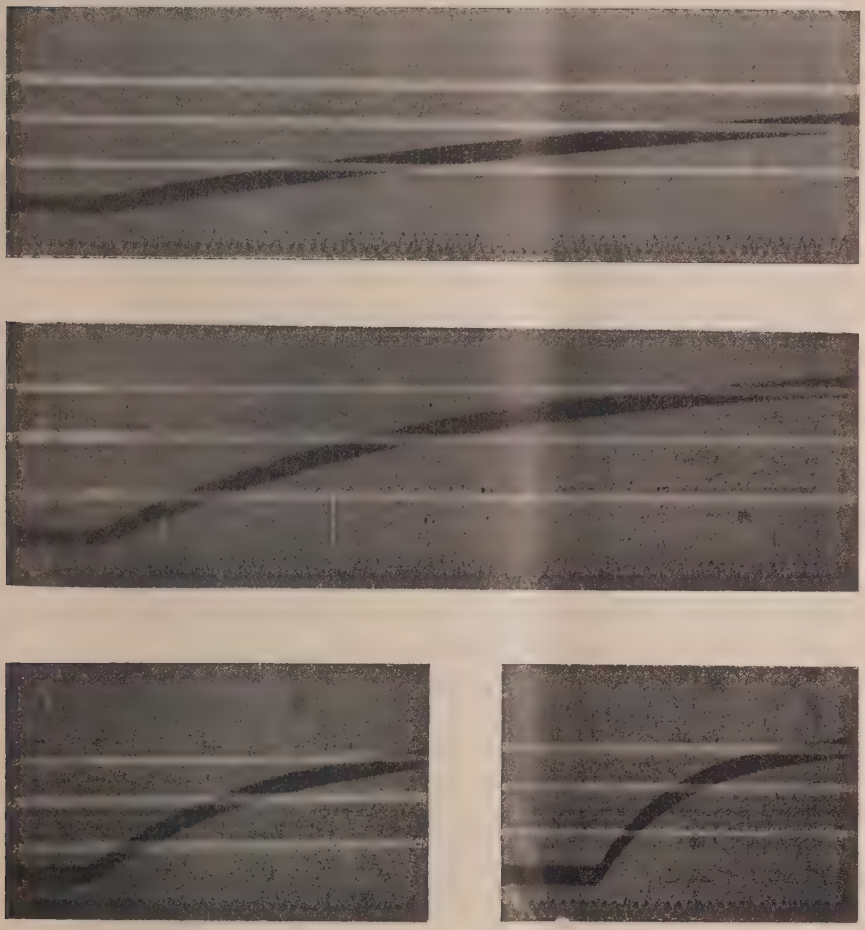

Fig. 2.

ziali del filamento, ottenute con intensità diverse della corrente principale. Venivano infine misurate l'intensità iniziale della corrente e lo spostamento D del contatto sul filo ponte ch'era necessario per riportare a zero la fibra, per compensare cioè la variazione totale Δr_0 di resistenza del filamento. Detto q il valore in *ohm* d'un centimetro del filo-ponte, si ha, come è facile vedere,

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = Dq\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{h}\right)$$

Tutti gli altri elementi della formola (4) si leggevano direttamente sulle cassette di resistenza che formavano le branche del ponte. Restava solo da misurare m, procedendo all'esame dei fotogrammi.

A tal fine si segnavano i punti d'incontro dell'orlo superiore della fascia curvilinea con l'orlo inferiore delle fasce orizzontali, corrispondendo quegli orli al medesimo bordo della fibra; e si riferivano quei punti d'incontro alla sinusoide marcante i tempi; supponiamo che vi corrispondano a partire dalla fascia più bassa, i tempi $t_1\, t_1\, t_3$. Per quei valori del tempo l'alterazione di resistenza del filamento *contandola dal valore finale* $r_0 + \Delta r_0$ che essa assumeva, era misurata da numeri proporzionali a 3, 2, 1, e perciò se la resistenza varia secondo la legge

$$r = r_0 + \Delta r_0 (1 - e^{-mt})$$

si avrà

$$\Delta r_0 e^{-mt_3} = A$$
$$\Delta r_0 e^{-mt_2} = 2A$$
$$\Delta r_0 e^{-mt_1} = 3A$$

dove A è una costante.

Si deduce da queste:

$$m = \frac{\log_n 2}{t_3 - t_2} = \frac{\log_n 3}{t_3 - t_1}$$

Si avevano così due valori per m, la cui concordanza doveva servire a dimostrare che l'andamento di r è veramente esponenziale, come richiede la teoria, e che l'esperienza era stata ben condotta.

Le quattro curve della figura si riferiscono a temperature iniziali crescenti di un filamento di platino; ed esse mostrano come fortemente aumenta la rapidità della esponenziale all'aumentare della temperatura del filamento: altri fotogrammi, non riprodotti, dànno le esponenziali ancora più lente.

La concordanza tra i due valori di m ottenuti per ciascuna fu veramente notevole, come mostra il seguente specchietto:

	Corrente in milliampere				
	29,5	50	73	104	150
m	0,572	1,576	3,18	6,30	11,95
	0,568	1,575	3,20	6,29	12,02
Media	0,570	1,575	3,19	6,29	12,0

Le medie sono arrotondate sulla terza cifra.

Il valore di $c : \frac{dr}{dt}$ si ottiene per quoziente tra $\frac{P}{r}$ ed m. È degno di nota che tanto P che m sono molto influenzati dalla pressione finale del gas intorno al filamento; ma il loro rapporto, che dà c/a rimane sensibil-

mente invariato. È sempre preferibile però tenere un'alta rarefazione intorno al filamento, perchè la temperatura di questo non varii continuamente, pel riscaldamento del gas, e non riesca con ciò difficile mantenere l'equilibrio nel ponte.

Il coefficiente m della esponenziale, a parità della corrente e quindi della temperatura del filamento, è pure influenzato dal fatto che la stessa variazione relativa di resistenza $\frac{\Delta R}{R+(r_0+f)\alpha}$ si produca con una forte o con una debole resistenza zavorra R; ma si modifica in corrispondenza anche P, poichè risulta anche diverso il rapporto $\frac{\Delta r_0}{r_0}$, e il valore che si calcola per $c:\frac{dr}{dt}$ resta, come dev'essere, invariato. Così il primo fotogramma, ottenuto con una resistenza R molto elevata e 52 volt in circuito, fu ripetuto con resistenza R piccolissima e una forza e. m. di circa 4 volt, in modo che la corrente avesse lo stesso valore di 29,5 milliampere. Il coefficiente m si mutò da 0.57 in 0,77, ma aumentò P nello stesso rapporto, e si ebbe per la capacità lo stesso valore. Ciò è utile a tener presente perchè non si creda che la rapidità della esponenziale sia determinata solo dalla temperatura iniziale del filo.

In una prossima Nota comunicherò i risultati numerici ottenuti con un filamento di platino, e la deduzione delle sue caratteristiche termo e calorimetriche fino alla temperatura di 1600°.

Fisica. — *Calorimetro ad anetolo.* Nota del dott. Ugo Grassi, presentata dal Socio A. Róiti.

Fisica. — *Sulla birifragenza della sostanza corticale dei peli animali.* Nota I di A. Pochettino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Geologia. — *Sulla indipendenza delle acque sotterranee dell'Etna dalle precipitazioni atmosferiche.* Nota di G. Ponte, presentata dal Corrispondente G. Di Stefano.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Studi sull'elettrolisi di composti cristallini.* I. *Ioduro d'argento* (1). Nota di G. Bruni e G. Scarpa, presentata dal Socio G. Ciamician.

I. *Introduzione.* — Che molti composti inorganici solidi posseggano conduttività elettrolitica è noto da molto tempo. Il carattere elettrolitico della conduzione venne dedotto, nella massima parte dei casi, dal fatto che la conduttività, al contrario di quella metallica, va aumentando col crescere della temperatura (2), oppure dall'intervento di forze elettromotrici di polarizzazione dopo il passaggio di una corrente continua; più raramente, almeno pei corpi cristallini, fu seguìto l'andamento della elettrolisi, ossia la separazione dei componenti agli elettrodi.

La letteratura dell'argomento si trova raccolta in varî trattati di fisica (3) e specialmente nella monografia di R. Lorenz sulla elettrochimica dei sali fusi (4); riteniamo quindi inutile riportarla qui per disteso.

Su questi fenomeni si trovano però spesso dati contradditorii. Così p. es. il solfuro d'argento, di cui già Hittorf (5) osservò la decomposizione elettrolitica viene considerato da un fisico moderno assai competente, K. Bädeker (6), come un conduttore metallico, almeno al disopra di 175°. Questo autore, in un suo pregevole lavoro riassuntivo sulle proprietà elettriche dei metalli (7), attribuisce tale qualità in genere agli ossidi, solfuri, seleniuri e simili composti metallici.

Meno studiato ancora è il lato quantitativo della questione, ossia il rapporto fra carica elettrica e massa materiale del corpo decomposto. La legge

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Tale comportamento non è sempre sufficiente per dedurne la natura elettrolitica del conduttore. Vedi F. Horton, Phil. Mag. [6], *11*, 505 (1906); Streintz, Ann. d. Phys. [4], *3*, 1 (1900); Guinchant, Compt. rend. *134*. 1324 (1902).

(3) Vedi p. es.: Wüllner, *Lehrb. d. Experimentalphysik*, vol. III, 817 (1897); G. Wiedemann, *Die Lehre v. d. Elektrizität*, vol. I, 547, 553; vol. II, 491 (1895); Chwolson, *Lehrb. d. Physik*, vol. IV, 593-594 (1908). Vedi inoltre: Königsberger, Physikal. Zeitschr. *7*, 570 (1906); *9*, 347 (1908); Zeitschr. f. Elektrochemie, *15*, 97 (1909); Doelter, Zeitschr. f. anorg. Chem. *67*, 287 (1910); Le Blanc, Zeitschr. f. Elektrochemie, *16*, 242, 319, 680 (1910); *18*, 549 (1912).

(4) *Die Elektrolyse geschmolzener Salze*, parte 2ª, pagg. 146, 164 e segg. Halle a. S. (1905).

(5) Ann. d. Physik, [2], *84*, 1 (1851).

(6) Ann. d. Phys., [4], *22*, 749 (1907).

(7) *Die elektrischen Eigenschaften der metallischen Leitern.* Braunschweig (1911).

di Faraday fu verificata per la elettrolisi dei solidi amorfi; così da Warburg (1) per la elettrolisi del vetro e da Haber (2) per quella della porcellana. Per i corpi cristallini non risulta che sia mai stata eseguita nessuna ricerca in proposito e ci parve interessante di mettere in chiaro se questa legge fondamentale della elettrochimica valga anche per essi.

Tale questione appare tanto più meritevole di essere studiata in quanto *a priori* può sembrare non impossibile, e nemmeno improbabile, l'esistenza di corpi cristallini che posseggano una conduttività elettrica di natura doppia, parte elettrolitica, e parte metallica. Bädeker (loc. cit.) dice che la possibilità di corpi di tal genere non può essere esclusa, per quanto non se ne conoscano finora esempî sicuri (3). È ovvio che la scoperta di un corpo cosiffatto, in cui la conduzione della elettricità avvenisse contemporaneamente per movimento di ioni e di elettroni presenterebbe dal punto di vista teorico un notevole interesse.

Per queste ragioni abbiamo intrapreso una serie di osservazioni sulla elettrolisi di corpi solidi cristallini, e anzitutto dei sali di argento che meglio di tutti si prestano a tali ricerche. Abbiamo finora operato sugli alogenuri, sul solfuro e sul seleniuro, e ci riserviamo di sperimentare su altri composti. Esponiamo in questa Nota i risultati delle nostre esperienze sulla elettrolisi del joduro d'argento che ci hanno condotto ad una verifica della legge di Faraday.

2. *Elettrolisi del joduro d'argento.* — Come è ben noto, il joduro d'argento può esistere in due forme cristalline: una esagonale, stabile a bassa temperatura ed una regolare che si forma dalla prima a 145° e fonde a 552°. Tale ultima modificazione presenta, soprattutto in vicinanza del punto di fusione, una notevole plasticità e fu ascritta dal Lehmann alla categoria dei *cristalli molli* (*fliessende Kristalle*), fu anzi la prima sostanza a proposito della quale il Lehmann espose tale concetto.

Tale qualità fu però recentemente contestata dal Tubandt (loc. cit.). Comunque sia, l'ascrivere il joduro d'argento ai *liquidi cristallini* (*kristallinische Flüssigkeiten*) e il chiamare *punto di fusione* quello a 145° in cui la modificazione esagonale passa nella regolare e *punto di chiarificazione* (*Klärpunkt*) (4) quello a 552°, come è fatto dal Posner nella ultima edizione delle tabelle di Landolt-Börnstein (5), è certamente esagerato ed inammis-

(1) Ann. d. Phys. [3], *21*, 622 (1884)

(2) Zeitschr. f. anorg. Chem., *57*, 154 (1908). Le deviazioni osservate salgono a ± 10 %.

(3) Anche altri autori considerarono la possibilità di conduttori di tal genere. V. Horton (loc. cit.); H. Scholl, Ann. d. Phys. [4], *16*, 462 (1905); Tubandt, Nernst-Festschrift, 446 (1912).

(4) Tale espressione è tanto più impropria, in quanto i cristalli *cubici* di joduro di argento sono naturalmente *mono*-rifrangenti.

(5) 4ª ediz. (1912), pag 246.

sibile. I cristalli regolari di joduro d'argento per quanto plastici, presentano, specialmente in prossimità del punto di trasformazione, una notevole resistenza meccanica. Essi sono poi isomorfi e dànno cristalli misti in tutti i rapporti col bromuro, e parzialmente col cloruro d'argento [1] che non possono affatto essere considerati come cristalli molli [2].

Le proprietà elettriche del joduro d'argento non sono meno interessanti di quelle cristalline e sono con queste in relazione. Già W. Kohlrausch [3] aveva osservato che, mentre il joduro d'argento esagonale presenta una resistenza assai forte al passaggio della corrente, la modificazione regolare conduce assai bene, tantochè egli non osservò variazione di conduttività al punto di fusione.

Esperienze assai precise furono eseguite recentemente da Tubandt (loc. cit.) il quale trovò che tale variazione esiste, che anzi al punto di fusione il joduro cristallino possiede una conduttività superiore a quella del sale fuso, cosicchè la solidificazione è accompagnata da una brusca diminuzione di conduttività. Tubandt esamina anzi la possibilità che tale fatto sia dovuto al possedere il joduro cristallino, oltre alla conduttività elettrolitica, anche una conduttività metallica (vedi sopra); egli non accetta però tale ipotesi e conclude giustamente che l'aumento di conduttività all'atto della solidificazione è dovuto alla condensazione derivante dalla maggiore densità dei cristalli in confronto del liquido.

La elettrolisi in sè fu studiata già molto tempo fa da Lehmann il quale eseguì esperienze microscopiche ed osservò qualitativamente il separarsi dell'argento sotto forma di dendriti al catodo e del jodio all'anodo. Lorenz e Czepinski [4] trovarono poi che si ha polarizzazione costante e ben misurabile dal punto di fusione fino a 320°. Esperienze quantitative sull'andamento dell'elettrolisi non furono finora eseguite ed è su questo punto che noi dirigemmo le nostre ricerche.

Credemmo opportuno di operare con due elettrodi entrambi di argento e ciò per osservare tanto la perdita di argento all'anodo, quanto il deposito al catodo, e per evitare la liberazione del jodio. Tale disposizione si dimostrò assai opportuna per quanto si dirà in seguito.

Data la plasticità del joduro d'argento, non si potè usare la disposizione adoperata poi pel solfuro e pel seleniuro, e cioè comprimere un blocchetto cilindrico, preparato previamente, fra due dischi di argento, ma dovemmo ricorrere al seguente modo di operare:

Il joduro veniva anzitutto fuso in un crogiuolo di porcellana nel quale venivano poi immersi i due elettrodi; questi erano costituiti di lamina di

(1) Mönkemeyer, *Neu. Jahrb. f. Mineral.*, *22*, 1 (1906).
(2) Tubandt, loc. cit., pag. 458.
(3) Ann. d. Phys., [3], *24*, 1 (1885).
(4) Zeitschr. f. anorg. Chem, *19*, 208, 265 (1899).

argento avevano una superficie di circa 2,5 cm.^{2} e venivano disposti paralleli ad una distanza di circa un centimetro. Due grossi fili d'argento li collegavano al circuito in cui si trovavano: una batteria di sei piccoli accumulatori, alcune opportune resistenze, un amperometro di precisione ed in talune esperienze un coulometro a rame.

Dopo di aver immersi gli elettrodi nella massa fusa, si lasciava solidificare quest'ultima in modo che gli elettrodi venissero inclusi e fissati, dopodichè si portava il tutto alla temperatura voluta. Questa veniva misurata mediante un termoelemento platino-platinorodio protetto da un tubetto di vetro pure immerso nella massa.

Il riscaldamento veniva effettuato mediante un fornetto elettrico di forma cilindrica a resistenza di filo di nichel, nel quale si immergeva tutto il sistema in modo che la temperatura fosse uniforme. Dopo di aver fatto passare la corrente per il tempo stimato necessario, si apriva il circuito, si faceva rifondere la massa e se ne estraevano gli elettrodi.

Si fecero prima alcune esperienze orientatrici. In una prima prova a 350°, essendosi adoperati elettrodi di lamina sottile (0,2 mm.) ed avendo fatto passare una corrente di 0,2 ampère, dopo circa due ore si osservò la scomparsa completa della parte immersa dell'anodo ed una abbondante deposizione di argento in forma di dendriti sul catodo.

Nelle esperienze successive si usarono quindi sempre elettrodi di lamina assai spessa (2 mm.). In due altre prove, avendo fatta passare per circa 5 e rispettivamente 3 ore una corrente di 0,5 e 0,2 ampère, si ebbe abbondantissima elettrolisi, tanto che le dendriti di argento depositate al catodo si allungarono fino a saldarsi coll'anodo, facendo così corto circuito.

In genere si osservò che, mentre l'anodo viene smangiato regolarmente, al catodo l'argento si deposita specialmente sui bordi ed in dendriti che presentano una straordinaria tendenza ad allungarsi in direzione dell'anodo. Solo facendo passare correnti deboli (0,1 ampère) e per tempi non troppo lunghi si riesce ad evitare il saldarsi dogli elettrodi.

3. *Verifica della legge di Faraday.* — Le esperienze destinate alla verifica della legge di Faraday furono *sei*, eseguite a varie temperature, tutte superiori al punto di trasformazione, e precisamente: a 160°, 200°, 250°, 300° e 400° (due). La corrente impiegata fu sempre di 0,1 ampère. La quantità di elettricità passata fu misurata; in tre casi (II, IV e VI) tenendo continuamente costante l'amperometro esattamente a 0,1 ampère e tenendo conto esattamente del tempo dell'elettrolisi; in due prove (I e V) col coulometro a rame ed in una (III) con entrambi i metodi, avendosi risultati concordanti a circa 1 %.

Gli elettrodi estratti dalla massa fusa venivano dopo raffreddamento immersi e lasciati alcun tempo in una soluzione di iposolfito sodico per disciogliere il joduro d'argento che rimane aderente, poi lavati, asciugati e

pesati. Si osservò subito che, mentre si riesce così senza troppa difficoltà a ripulire l'anodo in buone condizioni, ciò non si può mai ottenere per il catodo. Infatti le dendriti di argento sono spesso assai esili e ramificate e, o trattengono troppo joduro che non si può togliere, o, se si insiste, esse si staccano. La pesata dei catodi non dà quindi mai risultati abbastanza attendibili. Noi ci siamo quindi sempre serviti nel calcolo del peso dell'argento perduto dall'anodo. È ovvio che il metodo non può pretendere ad una grande esattezza, ma per una verifica approssimativa è, come si vedrà, più che sufficiente.

Nella tabella seguente sono indicati e riassunti i risultati numerici ottenuti.

Num. d'ordine	Temperatura in centigradi ± 5°	Intensità di corrente in Amp.	Durata dell'elettrolisi in minuti	Coulomb totali passati (F)		Argento perso all'anodo gr.	Coulomb elettrolitici da 7 (F')	Rapporto $\frac{F'}{F}$
				calcolati da 3 e 4	misurati col coulometro a rame (*)			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	160°	circa 0,1	—	—	790	0,8831	790	1,000
II	200	0,1	190	1140	—	1,2772	1142	1,002
III	250	0,1	98	588	582	0,6657	595	1,022
IV	300	0,1	126	756	—	0,8564	766	1,013
V	400	circa 0,1	—	—	609	0,6684	598	0,982
VI	400	0,1	111	666	—	0,7750	693	1,040

Nelle colonne 5 e 6 è indicato il numero totale dei coulomb passati nel circuito; nella colonna 8 i coulomb elettrolitici, ossia corrispondenti al peso dell'argento perso dall'anodo. Al calcolo servirono i seguenti equivalenti elettrochimici: $^1/_2$ Cu = 0,0003295 , Ag = 0,001118 (1). Nella colonna 9, infine è indicato il rapporto fra i due numeri. Come si vede le deviazioni stanno fra — 2 e + 4 per cento. Questa approssimazione deve ritenersi soddisfacentissima entro i limiti degli errori d'osservazione.

Resta dunque dimostrato che nella elettrolisi del joduro d'argento regolare la quantità di argento che migra dall'anodo al catodo segue la legge di Faraday, almeno entro i limiti di approssimazione sopra citati, ma probabilmente con tutta esattezza.

Una eventuale conduttività metallica posseduta dal joduro d'argento cristallino non potrebbe oltrepassare una frazione assolutamente minima della conduttività totale. In modo diverso si comporta certamente il joduro esposto

(*) Rame depositato: I, gr. 0,2602; III, gr. 0,1918; V, gr. 0,2006.

(1) Lüpke-Bose, *Lehrb. d. Elektrochemie*, 5ª edizione (1907).

all'azione della luce, già studiato da varii autori (1), e ciò verosimilmente in causa della separazione di granuli di metallo.

Abbiamo tentato di operare anche al disotto di 145°, e cioè sulla modificazione esagonale del joduro, ma essa conduce troppo poco per potere operare nel modo suddescritto. Contiamo di tornare sopra questo punto. In una Nota successiva riferiremo sul comportamento del solfuro e del seleniuro.

Chimica. — *Idrogenazione della santonina in presenza di nero di palladio* (2). Nota preliminare di G. Bargellini, presentata dal Socio E. Paternò.

Nel corso delle ricerche che da tre anni ho incominciate intorno alla riduzione delle sostanze organiche non sature con idrogeno molecolare in presenza di nero di platino o di palladio (ricerche delle quali ho pubblicato (3) per ora soltanto alcuni dei resultati ottenuti coi calconi) mi provai a sottoporre all'azione di questo mezzo riducente alcune sostanze naturali e fra queste, prima di tutte, la santonina.

Ed era naturale che avessi pensato a fare questa ricerca io, che dopo essermi occupato in altri lavori della santonina e dei suoi derivati, da molto tempo ho avuto occasione di sperimentare e di apprezzare i vantaggi del processo di riduzione con idrogeno in presenza di nero di platino o di palladio.

Notai subito il fatto che facendo passare una corrente di idrogeno attraverso una soluzione alcoolica od eterea di santonina in presenza di nero di platino o di palladio, dopo breve tempo la soluzione non dava più colla potassa alcoolica la caratteristica colorazione rossa della santonina, ma dava invece un liquido colorato in giallo con fluorescenza verde: dopo una lunga azione dell'idrogeno, la soluzione non dava più alcuna colorazione colla potassa alcoolica.

Questa osservazione che faceva pensare a due diversi prodotti di riduzione della santonina, mi spinse a cercare di isolarli e a farne lo studio.

Le prime ricerche furono eseguite facendo gorgogliare idrogeno in presenza di nero di platino o di palladio attraverso la soluzione alcoolica od eterea di santonina, a freddo o a caldo, e interrompendo la riduzione quando colla potassa alcoolica si aveva un liquido colorato in giallo con fluorescenza verde: però in tal modo ottenevo sempre, come prodotto della reazione, delle mescolanze di biidrosantonina con santonina inalterata insieme anche a tetra-

(1) K. Bädeker (loc. cit.); H. Scholl (loc. cit.).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(3) Bargellini e Bini, Gazz. Chim. Ital., 41, (2), 435, (1911); Bargellini e Finkelstein, ibid., 42, (2), 417, (1912); Bargellini e Martegiani, ibid, 42, (2), 427, (1912).

idrosantonina, come lo dimostravano le analisi e i poteri rotatorî dei prodotti ottenuti.

In varie esperienze ottenni:

$$[\alpha]_D = -123° \; ; \; -80° \; ; \; -41° \; ; \; +2°,2$$

mentre il potere rotatorio della santonina è — 173° e quello, per esempio, della tetraidrosantonina, come dirò fra poco, è + 61°,5.

Credei allora più sicuro fare sempre le riduzioni a temperatura ordinaria e misurare il volume dell'idrogeno assorbito. Vidi allora che, in presenza di nero di palladio, la santonina, quando assorbe la quantità di idrogeno calcolata per due atomi, si trasforma in una *biidrosantonina* la quale con potassa alcoòlica dà colorazione gialla e fluorescenza verde: quando assorbe la quantità di idrogeno calcolata per quattro atomi si trasforma in una *tetraidrosantonina*, la quale non dà nessuna colorazione colla potassa alcoolica.

A temperatura ordinaria ed anche alla pressione di un'atmosfera circa, la santonina non assorbe più di quattro atomi di idrogeno.

* * *

Il nero di palladio adoperato veniva da me preparato, volta per volta, riducendo il cloruro di palladio con acido formico e soluzione di idrato potassico.

Prima di usarlo, lo lavavo con molta acqua bollente; poi, dopo averlo sospeso in poco alcool, lo saturavo con idrogeno sotto leggera pressione.

Biidrosantonina. — In un pallone contenente 5 gr. di santonina sciolta in 100 c.c. di alcool e circa 1 gr. di nero di palladio si comprime, ad una pressione di 40-50 cm. di mercurio, l'idrogeno puro contenuto in una buretta graduata, disponendo l'apparecchio in modo da poter leggere quando si vuole il volume dell'idrogeno.

Agitando la soluzione di santonina col nero di palladio sospeso, l'idrogeno viene assorbito rapidamente. Dopo 15-20 minuti circa sono assorbiti 450 c.c. di idrogeno (quantità calcolata per due atomi di idrogeno).

Se allora si filtra, si nota che la soluzione filtrata non dà colla potassa alcoolica la colorazione rossa della santonina, ma dà invece un liquido colorato in giallo con fluorescenza verde: poco a poco colore e fluorescenza diminuiscono e resta il liquido quasi scolorato.

Dopo aver fatto distillare l'alcool dalla soluzione filtrata, resta un residuo bianco cristallino.

Anche nelle condizioni descritte, però, rimane sempre un po' di santonina inalterata, mentre si forma una quantità corrispondente di tetraidrosantonina ed è molto difficile poi separare completamente la biidrosantonina dalla mescolanza.

Comunemente io lavavo il prodotto greggio con poco etere e poi lo facevo cristallizzare dall'alcool diluito.

Nel fare la cristallizzazione dall'alcool diluito, la santonina meno solubile si deposita dapprima, mentre la biidrosantonina rimane nelle acque madri, dalle quali si può separare aggiungendo un eccesso di acqua.

Sciogliendola di nuovo nell'alcool ed aggiungendo acqua poco a poco alla soluzione alcoolica calda, la biidrosantonina si deposita in laminette madreperlacee.

Un campione di biidrosantonina così purificato e fusibile a 148°-150°, dopo essere stato seccato a 100°, dette all'analisi i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,2056 CO_2 gr. 0,5463 H_2O gr. 0,1494

Donde %	Trovato	Calcolato per $C_{15}H_{20}O_3$
C	72,47	72,60
H	8,07	8,00

Del medesimo campione fu determinato il potere rotatorio in soluzione alcoolica e trovato $[\alpha]_D = +23°$:

Concentrazione % 2,106	Deviazione + 1°
Lunghezza del tubo 20 cm.	Temperatura 30°.

La biidrosantonina è molto solubile nel cloroformio, nell'etere acetico e nel benzolo: nell'alcool si scioglie molto più facilmente della santonina.

Benchè l'analisi mi abbia dato ottimi resultati, pure, conoscendo per pratica quanto è difficile isolare la biidrosantonina dalla santonina e dalla tetraidrosantonina, faccio per ora riserve sul punto di fusione e sul potere rotatorio sopra riportati, che potrebbero non essere quelli caratteristici della biidrosantonina pura. È incerto ancora se la proprietà, che ha il prodotto da me analizzato, di diventar giallo alla luce, sia una proprietà della biidrosantonina oppure sia dovuta alla presenza di piccole quantità di santonina inalterata.

Studio ancora questa sostanza, che sto cercando di ottener pura per scissione del suo semicarbazone ed avrò quindi occasione di ritornare presto a parlare delle sue proprietà.

La biidrosantonina ha proprietà chetoniche che io ho potuto mettere in evidenza colla preparazione del suo *semicarbazone*.

Aggiungendo una soluzione acquosa concentrata di 1 gr. di cloridrato di semicarbazide e 1 gr. di acetato di potassio alla soluzione alcoolica di 1 gr. di biidrosantonina, si deposita dopo qualche tempo il semicarbazone bianco cristallino che viene raccolto su filtro e lavato.

In queste condizioni la santonina non reagisce e rimane nelle acque madri dalle quali si può isolare.

Questo semicarbazone si scioglie facilmente nell'alcool, nell'acetone e nel cloroformio, poco nel benzolo.

Si purifica facendolo cristallizzare dal toluene bollente, dal quale per raffreddamento si deposita come una polvere bianca, che al microscopio appare costituita da aghetti prismatici. Fonde a 238°-239°.

Sostanza gr. 0,1792 N c.c. 20,8 (12° e 764 mm.).

Sostanza gr. 0,2462 CO_2 gr. 0,5684 H_2O gr. 0,1644.

Donde °/₀	Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{23}O_3N_3$
N	13,78	13,77
C	62,96	62,95
H	7,47	7,54

Se si pensa che la santonina non reagisce direttamente col cloridrato di semicarbazide e acetato di potassio [1], la formazione di questo semicarbazone è da mettersi in rapporto col fatto, già da me notato [2], che, mentre dagli idrocalconi contenenti il gruppo — CO — CH_2 — CH_2 — si possono avere direttamente con grande facilità i semicarbazoni corrispondenti, questi non si possono invece ottenere dai calconi che contengono il gruppo — CO — CH = CH —

Tetraidrosantonina. — Si ottiene quando, invece di arrestare la reazione al momento in cui 5 gr. di santonina hanno assorbito 450 c.c. di idrogeno, si continua ad agitare la soluzione in presenza di nero di palladio e si continua a comprimere idrogeno.

In tempo di altri 15-20 minuti sono assorbiti rapidamente altri 450 c.c. di idrogeno.

Continuando ad agitare per oltre 12 ore e comprimendo idrogeno anche alla pressione di 70 cm. di mercurio, vennero assorbiti, in una esperienza che feci, soltanto 30 c.c.

Allora il liquido si separa per filtrazione dal nero di palladio: questo liquido non dà alcuna colorazione colla potassa alcoolica.

Se si sottopone ad analoga riduzione la biidrosantonina sciolta nell'alcool, 5 gr. di questa assorbono 450-460 c.c. di idrogeno, e niente di più, nelle condizioni di esperienza descritte e si forma tetraidrosantonina.

Dopo aver fatto distillare l'alcool dalla soluzione alcoolica filtrata, il residuo oleoso scolorato si rapprende per raffreddamento in una massa cristallina bianca.

Si scioglie facilmente nell'alcool e anche di più nel benzolo.

Si purifica facendola cristallizzare dall'alcool per aggiunta di acqua: si deposita in laminette bianche.

[1] Il semicarbazone della santonina fu preparato indirettamente della pernitrososantonina da Francesconi e Angelucci [Gazz. Chim. Ital., 31, (2), 302, (1901)].

[2] Bargellini e Bini, loc. cit.

Non diventa gialla alla luce. È stabile al permanganato. Fonde a 154°-155°. La sostanza fu seccata a 100° e analizzata.

Sostanza gr. 0,2525 CO_2 gr. 0,6683 H_2O gr. 0,2016.

Donde %	Trovato	Calcolato per $C_{15}H_{22}O_3$
C	72,17	72,00
H	8,93	8,80

In soluzione alcoolica il suo potere rotatorio è $[\alpha]_D = +61°,5$

Concentrazione % 2,234	Deviazione + 2°,75
Lunghezza del tubo 20 cm.	Temperatura 17°

Riguardo alla funzione dell'atomo di ossigeno non lattonico di questa sostanza, ho già a buon punto ricerche che presto comunicherò: soltanto allora sarà possibile esaminare prima di tutto se con questo metodo di riduzione sia o no da escludersi una isomerizzazione della santonina [1] e in seguito discutere le conclusioni che si possono trarre da queste mie ricerche.

Comunicherò presto anche i resultati delle esperienze che sto facendo con i più importanti derivati della santonina e con altre sostanze naturali fra le quali, per esempio, la elenina (alantolattone).

Chimica fisica. — *Ancora su una formula per l'indice di rifrazione dei miscugli binarii. — Risposta a una critica del sig. A. Mazzucchelli.* Nota di F. Schwers, presentata dal Socio R. Nasini.

Recentemente [2], il sig. Mazzucchelli è tornato un'altra volta su argomenti svolti circa un anno e mezzo fa [3] e discussi da me qualche mese dopo [4].

In tale Nota, il mio contradittore comincia con una spiegazione molto lunga a proposito d'un malaugurato errore di calcolo che mi era sfuggito e dal quale egli aveva dedotto che io avessi impiegato una formula differente da quella scritta; mi pare che ora finisca col riconoscere che si trattava semplicemente d'una svista di calcolo. La quistione sarebbe stata risoluta subito, se il sig. Mazzucchelli avesse semplicemente consultato la mia Memoria, quale è pubblicata negli Atti dell'Accademia del Belgio [5], dove

[1] Zelinsky (B, *44*, 2782, 1911) ha trovato, per esempio, che il pinene a temperatura ordinaria in presenza di nero di palladio, si trasforma in un isomero (isopinene).

[2] Rendiconti R. Accad. Lincei, 1912 (II), 701-707.

[3] » » » 1911 (I), 752-758.

[4] » » » 1911 (II), 510-518.

[5] Mém. Acad. roy. Belgique, 1911, pp. 1-182.

i calcoli figurano *in-extenso* per tutti i sistemi, e dove, nel caso particolare dei miscugli idroalcoolici, si trovano i valori corretti secondo la mia formula.

D'altra parte, è strano che anche ora il sig. Mazzucchelli continui a non capire le formule da me adoperate, ed a dire che la formula da lui proposta per l'indice teorico equivale alla mia, basandosi su una certa somiglianza di risultati in un caso particolare (miscugli acqua + alcool). Forse non mi sono ancora spiegato abbastanza chiaramente e tenterò di farlo ora. La spiegazione sarà più facile se si parte dalle formule riguardanti la densità.

Per il valore teorico d_t (ossia D_0 nella notazione di Mazzucchelli) ho ammesso la formula classica $d_t = \frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}}$. La densità essendo il rapporto fra peso e volume, si ottiene evidentemente la densità di un miscuglio di due sostanze dividendo il peso totale $p_1 + p_2$ per la somma dei loro volumi. Questa formula è sempre stata ammessa da tutti, e anche il mio egregio contraddittore non ha pensato di discuterla. Per me importa far osservare che, graficamente sull'asse delle ascisse vengono riportate delle quantità proporzionali ai pesi (ossia alle masse) delle sostanze, indipendentemente dal loro volume o da qualsiasi altra proprietà. Il luogo dei valori d_t è un iperbole equilatera.

Si può, ben inteso, variare a piacere il modo di rappresentare le ascisse. Per esempio, si possono prendere quantità proporzionali a d_1 per la sostanza 1, e a d_2 per la sostanza 2; la formula diviene:

$$d_v = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2}{\frac{p_1 d_1}{d_1} + \frac{p_2 d_2}{d_2}},$$

ossia

$$d_v = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2}{p_1 + p_2},$$

o ancora

$$d_v(p_1 + p_2) = p_1 d_1 + p_2 d_2.$$

In questo caso particolare, d_t è rappresentato graficamente da una linea retta congiungente d_1 e d_2. Se, d'altro canto, si facessero le ascisse inversamente proporzionali alle densità — cioè proporzionali ai volumi v_1 e v_2 — si avrebbe per d_t un'iperbole anche più differente dalla linea retta di quella corrispondente alla formula contenente le percentuali in peso. In conclusione, qualsiasi proprietà delle due sostanze può essere introdotta nel modo di rappresentare le ascisse; però tutte queste trasformazioni sono unicamente espressioni differenti d'uno stesso fenomeno. È preferibile tuttavia la nostra

vecchia formula (% in peso), a meno che non ci siano ragioni speciali per non usarla.

Passiamo ora al calcolo dell'indice teorico. Io ho proposto una formula simile a quella che fornisce d_v, salvo che dappertutto si sostituisce d con n, ossia colla densità dell'etere intramolecolare. La curva dei valori n_v (anche essa un'iperbole equilatera) rappresenta una funzione dell'indice proporzionale ai *pesi* delle due sostanze, come avviene nella formula fondamentale che fornisce d_v. Basta dunque calcolare d_v e n_v per uno stesso valore di p % per essere sicuri che i cambiamenti di densità $\frac{d - d_v}{d}$ e quelli d'indice $\frac{n - n_v}{n}$ sono paragonabili, riferendosi essi alla stessa soluzione. Dunque, anche nel caso che la mia formula non sia la migliore e che occorra cambiarla, è certo che ogni formula per n_v deve per forza avere per asse delle ascisse delle quantità proporzionali ai pesi, in quantochè si è fatto scelta di quest'asse per la densità teorica. Ma, se cambiamenti sono stati fatti nel modo di esprimere le percentuali nella d_v, è naturale che gli stessi cambiamenti dovranno aversi nella formula per n_v, senza di che si corre il rischio di paragonare soluzioni di concentrazione differente nello stabilire il valore di A mediante la relazione $\frac{d - d_v}{d} = A \frac{n - n_v}{n}$. Ad esempio, nel caso che si pongano le ascisse proporzionali a d_1 e a d_2, si ha per n_v la formula seguente:

$$n_v = \frac{p_1 d_1 + p_2 d_2}{\frac{p_1 d_1}{n_1} + \frac{p_2 d_2}{n_2}},$$

espressione che non si può semplificare più oltre, e che non corrisponde affatto, graficamente, ad una linea retta congiungente n_1 e n_2 (come avveniva per la formula analoga di d_v), e ciò per la ragione molto semplice che non esiste proporzionalità tra $\frac{d_1}{n_1}$ e $\frac{d_2}{n_2}$. Si potrebbe anche procedere senza inconvenienti all'operazione inversa: vale a dire rendere le ascisse proporzionali ai valori n_1 e n_2 ed avere così una linea retta per il luogo dei punti d_v. La formula diviene:

$$n_v = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{\frac{p_1 n_1}{n_1} + \frac{p_2 n_2}{n_2}}$$

o, semplificando

$$n_v = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{p_1 + p_2}$$

o ancora

$$n_v(p_1 + p_2) = p_1 n_1 + p_2 n_2$$

(formula attribuita erroneamente a me dal Mazzucchelli). Ma è evidente che, se si vogliono calcolare secondo questa formula i valori n_v e da questi quelli di C_n, bisogna cambiare nello stesso modo anche la formula di d_v, per poter fare un paragone immediato tra C_v e C_n. Così si ottiene:

$$d_v = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{\frac{p_1 n_1}{d_1} + \frac{p_2 n_2}{d_2}},$$

formula che non si può più semplificare e che non corrisponde a una linea retta.

Che cosa ha fatto il mio contradittore? Per l'indice teorico (N_0 secondo la sua notazione) pone la formula:

$$N_0 \left(\frac{p_1}{D_1} + \frac{p_2}{D_2} \right) = N_1 \frac{p_1}{D_1} + N_2 \frac{p_2}{D_2},$$

che è assai complicata, poichè dà le percentuali direttamente proporzionali agli indici N_1 e N_2 e inversamente proporzionali alle densità D_1 e D_2. Infatti $n_v = \frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2}}$ rappresenta l'indice in funzione dei pesi p_1 e p_2; se lo si rappresenta in funzione di $p_1 n_1 \%$ e $p_2 n_2 \%$ si ottiene

$$n_v = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{p_1 + p_2},$$

come ho mostrato sopra; se inoltre si esprime la formula così trasformata in funzione inversa della densità, si ha

$$n_v = \frac{p_1 \frac{n_1}{d_1} + p_2 \frac{n_2}{d_2}}{\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}}$$

sosia

$$n_v \left(\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2} \right) = n_1 \frac{p_1}{d_1} + n_2 \frac{p_2}{d_2},$$

cioè la formula di Mazzucchelli. Ma per la densità ammette la formula

$$d_v = \frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}},$$

dove le percentuali sono espresse in peso; mettendo i valori così ottenuti nella relazione $\frac{d - d_v}{d} = A \frac{n - n_v}{n}$, si vede che il Mazzucchelli paragona

i cambiamenti di densità di una soluzione a p_1 % (sostanza 1) + p_2 % (sostanza 2) coi cambiamenti d'indice di una soluzione a $\frac{p_1 n_1}{d_1}$ % (sostanza 1) + $\frac{p_2 n_2}{d_1}$ % (sostanza 2) (1). Così si devono per forza trovare valori di A differenti dai miei: nell'esempio scelto dal mio contradittore (miscugli idroalcoolici) si vede che sono più piccoli (1912, pag. 703); tuttavia non si osservano forti divergenze perchè le densità e soprattutto gli indici essendo poco differenti, la curva n_v subisce uno spostamento relativamente piccolo. Ma provi il sig. Mazzucchelli ad applicare le sue formule ad altri miscugli, per esempio a quelli contenenti del solfuro di carbonio: troverà che i suoi valori di A possono differire dai miei del 25 % e più.

Un ragionamento molto semplice può servire a mostrare chiaramente che un cambiamento nel modo di rappresentare le percentuali non può influire affatto sui valori di A da me trovati, ben inteso alla condizione che lo si faccia tanto per la d_v che per la n_v. Prendiamo il caso d'una soluzione contenente 50 % in peso di ciascuna delle due sostanze e supponiamo che si sia trovato secondo le formule da me adoperate un cambiamento di densità di 4 % e un cambiamento d'indice di 1 %; diremo che A = 4. Si può ora rappresentare la concentrazione in funzione della densità: se $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$, diremo che la soluzione di cui si tratta contiene 33·333... % ($p_1 d_1$ %) della sostanza 1 e 66·666... % ($p_2 d_2$ %) della sostanza 2. Per questa concentrazione, troviamo naturalmente variazioni identiche tanto per la densità quanto per l'indice, dunque lo stesso valore di A. Questo ragionamento può ripetersi per tutte le concentrazioni e i valori di A saranno assolutamente gli stessi per le due serie di calcoli, salvo che ciascun valore particolare di A si riferirà a una concentrazione un poco differente. È chiaro che ciò non importa pei sistemi binarî dove A è perfettamente indipendente dalla concentrazione; rispetto poi ai sistemi per i quali A non è costante, la curva delle sue variazioni colla concentrazione sarà costruita nei due casi cogli stessi valori, colla sola differenza che i singoli punti saranno distribuiti un po' differentemente lungo l'asse delle ascisse, il che non influisce nell'interpretazione da darsi al fenomeno. Ho scelto di preferenza le formule in peso per la loro semplicità di forma e per la ragione d'ordine pratico che esse esigono un minimo di calcoli; inoltre è più logico rappresentare le funzioni solamente in proporzione dei pesi — ossia delle masse delle sostanze — e non in proporzione di una proprietà scelta arbitrariamente e che è differente nella sostanza 1 e nella sostanza 2. Fi-

(1) Almeno l'n_v si riferisce ad una soluzione di tale concentrazione; per quanto concerne l'n osservato, si riferisce, mi pare, a una soluzione di p_1 % + p_2 %, come per d e per d_v.

nalmente, nella formola da me adoperata non entrano che valori della densità nella d_v e dell'indice nella n_v: così si evita l'introduzione dei valori d'indice nella espressione di d_v ossia di densità in quella di n_v (vedere sopra), valori che non fanno parte integrante delle formule, ma risultano da cambiamenti nel modo di rappresentare l'asse delle ascisse. Ad ogni modo, sarà sempre meglio calcolare d_v e n_v secondo le espressioni da me adottate, e di far dopo le trasformazioni di asse che si credono opportune, senza di che si va a rischio di commettere degli errori, come è avvenuto per il sig. Mazzucchelli.

Ho così dimostrato che, contrariamente alla tesi del mio contradittore, una sola specie di formula è adottabile per il calcolo di d_v e di n_v, la quale permetta di far un paragone logico tra i mutamenti di d e di n avvenuti in seguito alla mescolanza di due liquidi; e che, qualunque sia il modo adoperato per rappresentare la concentrazione, niente deve essere cambiato ai miei valori di A nè alle mie conclusioni. Per quanto concerne l'osservazione del sig. Mazzucchelli che si potevano prevedere le relazioni da me trovate, non posso arrivare a capire la sua portata critica. Non sarebbero nè più nè meno vere, se si fossero potute prevedere... anche « a posteriori »; nemmeno questo però si poteva fare prima di aver ammesso una formula logica anche per la n_v, cioè che non contenesse valori di d (sempre nel caso che si esprimano le percentuali in peso). La migliore prova di questo è che il lavoro di Pulfrich, amplificato da Buchkremer, non è riuscito a mostrare che A è una grandezza caratteristica per ciascuna coppia di liquidi e che varia da un sistema all'altro secondo regole definite.

Mi riserbo di pubblicare in una prossima Nota alcune altre considerazioni sull'argomento da me qui trattato.

Chimica. — *Idrogenazione dell'acido santoninico.* Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli.

Chimica. — *Isonitrammine terpeniche.* Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio E. Paternò.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Chimica. — *Sul comportamento reciproco dei solfati, cromati, molibdati e wolframati alcalini a bassa e ad alta temperatura* (1). Nota II^a^. di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

II. — Analisi termica.

Ho riferito in una Nota precedente (2) lo studio sulla solubilità allo stato solido a bassa temperatura e sul reciproco comportamento in soluzione acquosa delle tre coppie di sali: K_2SO_4-K_2CrO_4, K_2CrO_4-K_2MoO_4, K_2SO_4-K_2MoO_4. Le corrispondenti coppie con il wolframato potassico non poterono venir studiate per l'instabilità di questo sale nelle soluzioni acquose. Nelle esperienze eseguite ad alta temperatura, oltre le precedenti, furono prese in considerazione anche le tre coppie K_2SO_4-K_2WO_4, K_2CrO_4-K_2WO_4, K_2MoO_4-K_2WO_4.

I sali puri e le miscele saline vennero fusi in crogiolo di platino posto entro un forno elettrico a resistenza di filo di nichel. Le temperature vennero lette con un termoelemento Pt-Pt-Rd immerso direttamente nella massa e un galvanometro Siemens ed Halske.

I punti di solidificazione dei quattro sali risultarono:

K_2SO_4	1070°
K_2CrO_4	978
K_2MoO_4	926
K_2WO_4	894

Il punto di solidificazione del solfato potassico concorda (3), quantunque un po' inferiore, con quelli dati da Hüttner e Tammann (1074°), da Nacken (1076°), da Groschuff (1072°), da Jänecke (1074°), da Karandéeff (1074°): quello dato da Müller (1057°) è evidentemente troppo basso.

Il punto di solidificazione del cromato potassico fu trovato a una temperatura intermedia a quelle date da Žemčužny (984°) e da Groschuff (971°).

I punti di solidificazione del molibdato e del wolframato potassico furono trovati da Hüttner e Tammann (4) rispettivamente a 926° e a 906°: mentre il primo concorda perfettamente con quello trovato da me, il secondo è alquanto superiore. La temperatura che ho dato più sopra è il valore massimo avuto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Questi Rendiconti, XXI, 1, 667 (1912).

(3) Landolt-Börnstein, Tabellen, 4^a^ ediz., 1912.

(4) Zeit. f. anorg. Chemie, *43*, 227 (1905).

con varii campioni: la solidificazione non avveniva mai con arresto così netto come pei tre sali precedenti. L'aggiunta di piccole quantità di alcali e di anidride, pel caso che il sale contenesse un eccesso dell'una o dell'altro, non ha presentato alcun vantaggio.

Come temperature di trasformazione di questi sali furono trovate:

K_2SO_4	585°
K_2CrO_4	666
K_2MoO_4	475
K_2WO_4	575

Per i primi due sali la trasformazione è accompagnata da un notevole sviluppo di calore e nel raffreddamento della massa si osserva un netto arresto di temperatura. Le temperature di trasformazione concordano sufficientemente con quelle osservate dagli autori precedenti. Per il solfato: Hüttner e Tammann 587°, Nacken 595°, Groschuff 586°, Jänecke 587°, Karandéeff 599°, Müller 588. Per il cromato: Žemczužny 679°, Groschuff 666°.

La trasformazione del molibdato e del wolframato al contrario è accompagnata da un lievissimo sviluppo di calore e l'effetto termico è difficilmente visibile. Hüttner e Tammann non osservarono nel raffreddamento alcun punto di trasformazione: essi stabilirono la temperatura di trasformazione approssimativa basandosi su alcune osservazioni: e cioè per il molibdato l'intorbidamento a circa 200° della massa solidificata che a temperature superiori era chiara e cristallina: per il wolframato la polverizzazione a 300°-200° della crosta salina formatasi su un filo di platino per solidificazione del sale fuso. Essi conclusero che le temperature di trasformazione dei due sali sono intorno alle temperature sopra indicate. Le temperature di trasformazione dalle mie esperienze risultano superiori a quelle date da Hüttner e Tammann: agendo su 30 gr. di sostanza ho potuto osservare ripetutamente un lieve rallentamento nel raffreddamento a 475° per il molibdato, a 575° per il wolframato: lo sviluppo di calore che si ha nella trasformazione è assai piccolo e queste temperature hanno solo un valore approssimativo: la trasformazione dei due sali avverrebbe intorno a queste temperature.

1. K_2SO_4-K_2CrO_4.

Questo sistema fu studiato precedentemente da Groschuff [1] che prese in considerazione sia le temperature di solidificazione che quelle di trasformazione delle miscele. Le esperienze che ho eseguito su questa coppia di sali per avere un confronto diretto con le altre concordano con i risultati avuti dal Groschuff.

La curva di cristallizzazione va dal punto di solidificazione del cromato a quello del solfato e si mantiene sempre intermedia costituendo quasi una retta.

[1] Zeit. f. anorg. Chemie, *58*, 102 (1908).

TABELLA 1ª.

% in peso K_2SO_4	% molec. K_2SO_4	Temperature di cristallizzazione	Temperature di trasformazione
0	0	978°	666°
10	11.03	981	661
20	21.80	984	651
40	42.64	1002	639
50	52.73	1016	632
60	62.58	1026	623
80	81.67	1045	600
90	90.94	1056	592
100	100	1066	585

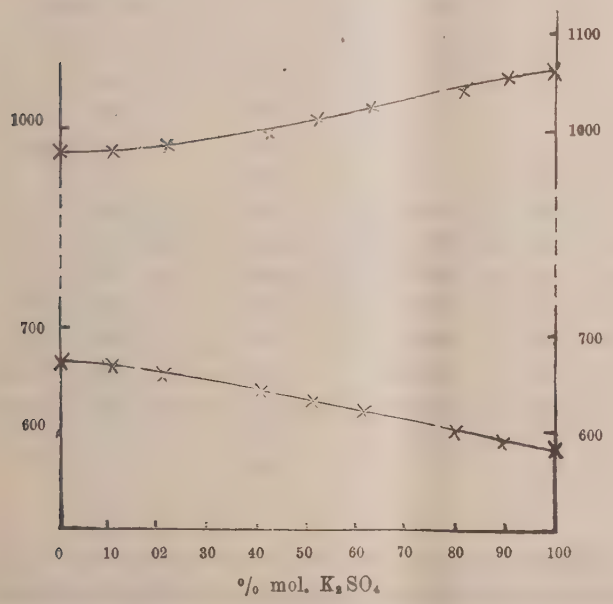

FIG. 1.

La curva di trasformazione è assai analoga a quella di cristallizzazione e congiunge quasi rettilinearmente le temperature di trasformazione dei sali puri.

2. K_2CrO_4-K_2MoO_4.

Anche per questa coppia di sali la curva di cristallizzazione è intermedia alle temperature di solidificazione dei sali puri. Le miscele fino a 30 % mol. cromato cristallizzano alla stessa temperatura di cristallizzazione del molibdato: solo per un contenuto superiore in cromato la cristallizzazione avviene a temperature superiori fino a giungere alla temperatura di solidificazione del cromato puro. La curva di cristallizzazione nel primo tratto è parallela alle ascisse, poi sale al punto di solidificazione del cromato.

Tabella 2ª.

% in peso K_2CrO_4	% molec. K_2CrO_4	Temperature di cristallizzazione	Temperature di trasformazione
0	0	926°	475°
5	6.06	926	465
10	11.98	926	?
20	23.46	926	?
25	29.00	926	?
30	34.44	930	470
40	44.96	934	502
50	55.07	939	540
60	64.77	942	575
70	74.08	955	600
80	83.06	960	62-
90	91.68	972	648
100	100	978	666

La curva di trasformazione completa non potè venire stabilita. La trasformazione del molibdato anzichè essere più visibile nei cristalli misti per la presenza del cromato che ha un calore di trasformazione assai più notevole si lascia solo osservare nella miscela con 6 % mol. cromato. Probabilmente la trasformazione nelle miscele è molto più lenta, sicchè l'effetto termico, di per sè molto piccolo, si fa sentire in un intervallo di temperatura così largo da sfuggire nelle osservazioni termiche.

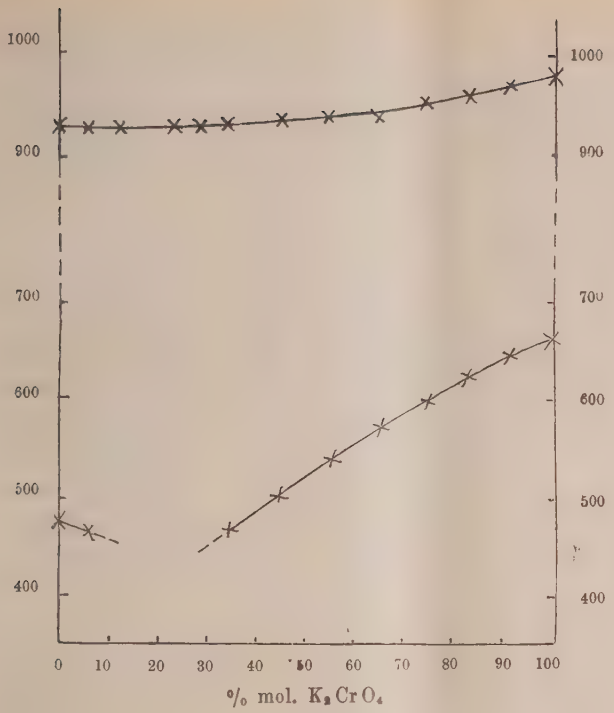

Fig. 2.

Il punto di trasformazione del cromato scende lungo una curva regolare da 666° a 470°, la miscela a 34,4 % cromato ha questa temperatura di trasformazione che è all'incirca la temperatura di trasformazione del molibdato puro: oltre questa concentrazione la trasformazione non è più visibile. Dati i larghi rapporti di solubilità che esistono indubbiamente tra questi sali a 25° è verosimile che intorno a 450° la solubilità tra le forme β di questi sali sia completa e la curva di trasformazione dalla forma α alla forma β sia continua con un minimo nell'intervallo da 0 a 35 % mol. cromato.

3. K_2SO_4-K_2MoO_4.

La curva di cristallizzazione è pure continua; al contrario delle precedenti ha un leggero minimo molto piatto di 6° inferiore alla temperatura di solidificazione del molibdato. La temperatura di solidificazione della miscela a 45 % mol. solfato è uguale a quella del molibdato puro.

Un'analoga curva di cristallizzazione fu ottenuta da Boeke [1] per i corrispondenti sali sodici.

[1] Zeit. f. anorg. Chemie, *50*, 366 (1906).

TABELLA 3ª.

% in peso K_2SO_4	% molec. K_2SO_4	Temperature di cristallizzazione	Temperature di trasformazione
0	0	926°	475°
5	6.70	922	460
10	13.19	920	?
20	25.48	920	?
25	31.30	920	?
30	36.94	922	465
35	42.40	926	475
40	47.68	934	484
50	57.78	952	508
60	67.41	980	525
70	76.13	998	544
80	84.59	1018	558
90	92.48	1042	568
100	100	1066	583

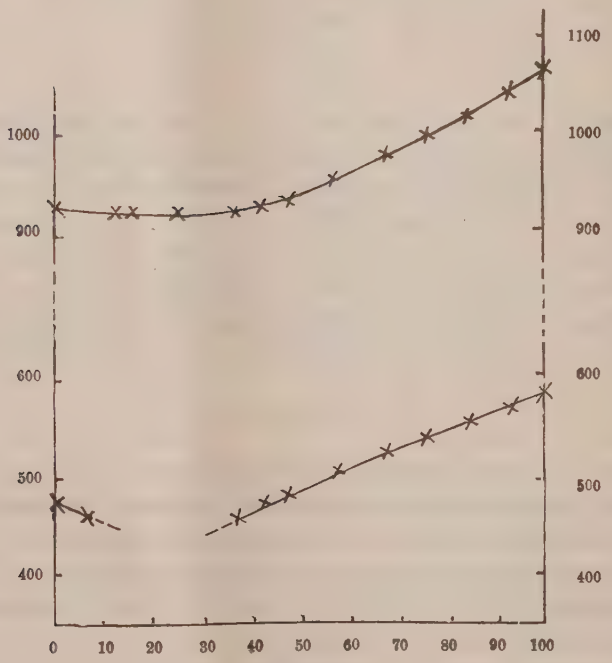

FIG. 3.

Anche per questo sistema non si potè stabilire la curva di trasformazione completa. La trasformazione dalla parte del molibdato si lascia solo osservare nella miscela con 6.7 % mol. solfato. Dalla parte del solfato la curva di trasformazione scende regolare dalla temperatura di trasformazione del solfato a 470°, temperatura di trasformazione della miscela a 36.94 % mol. solfato: più oltre anche da questo lato la trasformazione non è visibile.

Per i corrispondenti sali sodici Boeke trovò che la trasformazione dei nella forma γ dei cristalli misti ricchi in molibdato (che per i sali sodici avviene con rilevante sviluppo di calore) varia secondo una curva che si può seguire sino all'incontro della curva di trasformazione dei cristalli misti ricchi in solfato. Il Boeke fa incontrare queste due curve in un largo angolo in forma di eutettoide a 212°, limitando il campo di immiscibilità allo stato solido a questa temperatura, non avendo mai osservato anche per miscele prossime alla composizione dell'eutettoide arresti di natura eutettica a 212°, ma solo trasformazioni nei cristalli misti a temperature superiori.

Le esperienze del Boeke non escludono e forse rendono più probabile che queste due curve costituiscano un'unica curva di trasformazione e che la solubilità tra le due forme sia completa.

Mentre le esperienze termiche lasciano dubbî sulla solubilità a 210° tra le forme inferiori dei solfati e molibdati di sodio da 75 a 90 % mol. solfato, la solubilità tra i corrispondenti sali potassici ne risulta incerta per concentrazioni da 10 a 50 % mol. solfato intorno a 450°. Si può ritenere tuttavia probabile, dati anche i larghi rapporti di solubilità che esistono a bassa temperatura, che tanto per il sale potassico che per il sale sodico, la solubilità alle dette temperature sia completa e la curva di trasformazione sia continua a minimo.

Chimica tecnologica. — *Il freddo nella conservazione delle olive* (1). Nota di Giovanni Sani, presentata dal Socio Koerner.

Nella Nota precedente (2) che ho avuto l'onore di presentare a codesta illustre Accademia, ho posto in rilievo il fatto, constatato con esperienze di Laboratorio, che il freddo arresta l'attività lipolitica degli enzimi contenuti nel frutto di olivo, mi parve che la cosa potesse avere un qualche interesse pratico e nell'ultima campagna oleifera ho intraprese prove in proporzioni industriali.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico Agrario del Regio Istituto Superiore Agrario di Perugia.

(2) Seduta del 3 marzo 1912, vol. XXI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 5°. *Ricerche intorno all'olio di olivo.*

Contemporaneamente ho voluto vedere quali fossero gli effetti della conservazione delle olive, come si pratica industrialmente, nei riguardi alla qualità dell'olio ottenuto, prendendo come criterio chimico a giudicare il numero di acidità, costante che assume a mio parere un'importanza decisiva avendo una marcata influenza sui caratteri organoletrici degli olii la quantità di acidi liberi contenuta ed ancora sulla loro conservabilità. Per questo scopo durante l'ultimo periodo di preparazione di olio di olivo ho mandato in varii paesi oleiferi dell'Umbria il signor dottore Misuri a prelevare campioni di olio mentre usciva dalle presse, coll'incarico preciso di assumere e notare scrupolosamente per ciascun campione prelevato informazioni sul tempo e sul modo di conservazione delle olive lavorate.

Trascrivo i risultati analilici ottenuti:

Num. d'ord.	Luogo di produzione	Tempo di conservazione delle olive	Numero di acidità dell'olio (mmg. di KOH per gr. d'olio)
1	S. Manno	12 giorni	5,11
2	Olmo	4 id.	1,66
3	Caleinari	7 id.	4,20
4	Laccugnano	10 id.	2,36
5	Montefalco	5 id.	5,19
6	Trevi	25 id.	12,84
7	Id.	12 id.	4,07
8	Id.	30 id.	14,30
9	Spoleto	30 id.	10,42
10	Id.	15 id.	6,96
11	Montefalco	16 id.	10,30
12	Id.	3 id.	3,50
13	Foligno	3 id.	5,30
14	Colle S. Lorenzo	2 id.	1,34
15	Umbertide	26 id.	15,0
16	S. Donnino (Città di Castello)	50 id.	23,34
17	Perugia	8 id.	4,62
18	Passignano (lago)	10 id.	6,52

Come si vede si ha una stretta relazione fra la acidità degli olii e la durata della conservazione delle olive, nel senso che, in generale, più prontamente queste vengono lavorate e migliori, meno acidi sono gli olii. Ora vi sono molte ragioni di vario genere che fanno sì che più o meno lungamente le olive si conservino prima di molirle e gli olii d'olivo che sono nel grande

commercio dimostrano spesso con la loro acidità, l'effetto della prolungata conservazione delle olive.

Con olive appena colte si possono avere olii con piccolissime quantità di acidi liberi. Infatti il 26 p. p. novembre ho raccolto separatamente quattro varietà di olive coltivate nel campo sperimentale di questo Istituto, ne ho fatto quattro piccoli campioni d'olio e ne ho avuti questi risultati analitici:

Varietà delle olive	Data della raccolta	Data della preparazione dell'olio	Acidità dell'olio (mmg. di KOH p. gr. d'olio)
Cimmignola	26.11.1912	26.11.1912	1,06
Raggia	Id.	Id.	0,85
Agogia	Id.	Id.	1,00
Morella	Id.	Id.	0,65

Allo scopo di studiare i progressi della lipolisi nei frutti maturi lasciati sugli alberi, ho riservato due piante in piena fruttificazione, riparate dai venti, fino al ventidue di febbraio, cioè per un periodo di tempo superiore di gran lunga a quello della più tardiva raccolta ed ho preparato olio raccogliendo frutti in diversi momenti e determinando l'acidità in ogni campione d'olio appena fatto, qui sotto sono scritti i risultati ottenuti:

Data della raccolta delle olive	Data della preparazione dell'olio	Acidità dell'olio (mmg. di KOH per gr. d'olio)
14.12.1912	26.11.1912	2,10
23. 1.1913	Id.	2,14
17. 2.1913	Id.	2,80
22. 2.1913	Id.	2,799

Mentre è sensibile la differenza fra l'acidità degli olii ottenuti il 26 novembre p. p. e l'olio avuto il 14 dicembre 1912, lieve è quella fra questo e l'olio ottenuto il 23 gennaio 1913; protraendo per circa un mese la conservazione delle olive sulle piante si arriva ad avere un olio con una acidità che è ancora al disotto della media acidità degli olii umbri. Questo progredire prima rapido, poi relativamente lento del processo di saponificazione dell'olio nei frutti attaccati all'albero è in relazione cogli abbassamenti di temperatura verificatisi nell'atmosfera ambiente ed anche in armonia colle mie esperienze di Laboratorio sugli effetti del freddo nella conservazione delle olive e sui risultati dell'esperimento industriale che qui brevemente riassumo.

È noto ai fisiologi che a maturanza completa i tessuti dei frutti si avviano alla decrepitezza ed alla morte e le pareti cellulari acquistano tendenza ad obbedire solo alle leggi fisiche, perdendo man mano l'attività fisiologica, di qui la possibilità di miscele di contenuti cellulari che prima non si verificavano e di conseguenti reazioni cha il freddo solo o il caldo elevato possono arrestare.

Un'altra considerazione risulta evidente dal complesso dei dati sovraesposti, che cioè il differire la raccolta delle olive è minore danno che il conservarle lungamente nei magazzeni prima di molirle; quando però non si disponga di un frigorifero.

Parte Sperimentale.

Il primo di gennaio ho potuto avere a mia disposizione una cella frigorifera ed ho disposto subito per la raccolta delle olive da conservare, il giorno tre e quattro le olive di mano in mano che venivano raccolte erano poste entro casse di ferro zincato chiuse a chiave, con fondo e pareti bucherellate, per un'altezza di 45 cm. Nel pomeriggio del giorno 4 le casse furono poste nell'anticella ove la temperatura era di — 1°, la mattina del giorno 5 vennero portate nella cella ove la temperetura ha oscillato durante tutto il periodo della conservazione fra i — 3° e i — 5°.

Il giorno 7 febbraio essendosi verificato un guasto nel compressore e constatando un elevamento della temperatura a + 5° ho temuto che le olive potessero soffrire ed ho deciso di lavorarle per averne olio ed il giorno 8 febbraio ho fatto portare al frantoio le casse. Con tutte le cure più rigorose è stato provvisto da me e da un mio assistente al lavaggio ed alla disinfezione di tutto il macchinario e di tutti gli utensili del mulino. Il macello, i fiscoli nuovi, le presse, i recipienti di raccolta dei liquidi, sono stati trattati con soluzione di soda, poi con acqua calda, indi con acqua fredda. Sono state prese tutte le cautele e si sono seguite tutte le migliori norme per porci in condizioni di lavorare bene.

Aperte le casse si è constatato che le olive avevano l'aspetto dei frutti appena colti, erano turgide, lucenti, tagliate presentavano sezione dall'epidermide, prima bruna, poi viola, poi bianca vicino al nocciolo, ed il sapore era amaro intenso; caratteri tutti di ottima conservazione.

Queste olive alla raccolta mi avevano dato un olio con una acidità uguale a 2,16.

Le operazioni di frangitura delle olive, di pressione della pasta, di decantazione dell'olio dalle acque di vegetazione, di raccolta dell'olio in damegiane e la relativa chiusura delle damegiane col timbro del Laboratorio sono state sorvegtiate da me e da un mio assistente.

L'olio ottenuto è di qualità ottima, ricorda il profumo del frutto fresco, ha un bel colore giallo dorato brillante, è poco vischioso, ha un sapore dolce,

delicato; per le sue proprietà chimiche e per le sue qualità organolettiche come mi hanno confermato persone di competenza nota (1), occupa uno dei primi posti fra i prodotti dell'annata nel paese, e ciò è tanto vero che da negozianti e da sensali di olio è stato preferito fra molti campioni che da terzi ho fatto offrire per la vendita.

Chimicamente ha costanti che lo dimostrano un ottimo olio d'olivo — e ciò che più a me interessa la sua acidità è 2,12, il suo indice di refrazione è 62 — il che conferma che il freddo non ha permessa la minima alterazione del frutto, anzi posso affermare con sicurezza che ha favorito l'affinamento del prodotto, perchè il mio olio (lo chiameremo così) è di gran

(1) Non essendo autorizzato a pubblicare i giudizi datimi da autorevoli chimici e pratici perchè personali, mi limito a citare documenti ufficiali: all'olio venne data la marca T. T. O. C. (The Triumph of Cold) e fu spedito per esame alla R. Stazione Chimico agraria di Pisa che il 13/3/1913 rilasciava il certificato n. 1119 coi risultati di analisi: densità a 15° 0,9168, numero di iodio 83,40, numero di saponificazione 189-191, indice refrattometrico (a 25°) 62,1, grado termico 41,5-42.

Saggi organoletrici. — L'olio filtrato ha colore giallo chiaro, lieve odore ordinario di olio nuovo; sapore poco marcato, gradito, leggero di oliva fresca, poco acido, poco grasso. In confronto di buon olio prodotto nei monti di Calei ha sapore più gradito. Fu chiesto il parere di due esperti nella degustazione degli olii i quali, in paragone di un olio di Calei recentemente spremuto, giudicarono migliore l'olio in esame valutandolo ad un prezzo che poteva essere di circa lire 10 superiore al prezzo per quintale dell'olio di Calei.

Il Direttore
Italo Giglioli.

Un altro campione venne consegnato al sig. Emilio Forconi negoziante d'olio di Terentola il quale per averne un giudizio lo mandò al R. Oleificio sperimentale di Spoleto che gli rilasciò il seguente certificato:

R. OLEIFICIO SPERIMENTALE DELL'UMBRIA
Laboratorio Elaiochimico.

Certificato n. 111.

Campione di olio d'oliva (dichiarato dal presentatore) presentato dal sig. Emilio Forconi il giorno . . . . . per eseguirvi l'assaggio organolettico.

Tassa d'analisi L. 2.

Risultato dell'analisi.

Aspetto — Limpido.
Colore — Giallo verdino attenuato.
Odore — Poco pronunziato.
Sapore — Dolce — Franco di difetti.

L'olio in esame si presenta all'assaggio organolettico di buona qualità.

Spoleto, 14 marzo 1913.

Il Direttore
f.° F. Bracci.

lunga più fino, più delicato, più profumato, di aspetto più brillante, di colore più bello, più fluido dell'olio fatto colle stesse olive raccolte qui nella tenuta del nostro Istituto negli stessi giorni e conservate in magazzino per 8 o 10 giorni e che all'analisi mi ha fornito un'acidità di 4,77. Che nelle olive dopo la raccolta si iniziino oltre alle lipolisi, altre alterazioni che abbiano da una parte l'effetto di favorire la formazione di sostanze vischiose e dall'altra quello di demolire le sostanze profumanti del frutto? e che queste siano impedite dal freddo? Continuerò nelle mie ricerche in proposito, lieto frattanto di avere l'onore di presentare a codesta Illustre Accademia le risultanze di un esperimento che potrà portare vantaggio ad una fra le industrie agrarie che ha, per alcune regioni italiane, la più grande importanza.

Patologia vegetale. — *Considerazioni critiche sulla malattia del castagno detta dell'inchiostro*. Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Dopo le pubblicazioni dei proff. Briosi e Farneti la questione della *malattia dell'inchiostro* è entrata in una fase nuova, nella quale io credo debbano svolgersi di preferenza le nostre ricerche attuali.

La questione, come ho già detto nelle mie Note precedenti, deve essere nettamente posta nel modo seguente:

Le infezioni fungine dei rami nei castagni colpiti dalla malattia, rappresentano la causa principale di questa, oppure l'infezione della parte aerea è preceduta e occasionata da un'alterazione delle radici e del colletto?

I proff. Briosi e Farneti, ritenendo esauriente a questo riguardo la loro *unica* prova d'inoculazione eseguita col *Coryneum*, affermano senz'altro che il *mal dell'inchiostro* ha per esclusiva causa il parassitismo di questo fungo, il quale prima attaccherebbe la parte aerea, e quindi le radici.

Contrariamente a questa affermazione stanno i seguenti fatti: 1° i castagni, anche precedentemente all'attacco del *Coryneum*, presentano un'alterazione delle grosse radici e del colletto; 2° gli attacchi del *Coryneum* sono spesso stranamente limitati e saltuari, non quali sarebbero se essi dipendessero unicamente dal diffondersi dei numerosissimi organi di riproduzione; 3° le ripetute inoculazioni, eseguite con conidi ed ascopore su giovani piante di castagno *sane*, hanno avuto sempre esito negativo (1).

Questi fatti rendono giustificato il ricercare da quali cause derivi la preliminare alterazione della parte sotterranea, alterazione che evidentemente

(1) Inoculazioni con esito negativo furono pure eseguite da Ducomet in Francia.

costituisce la condizione predisponente all'infezione del *Coryneum* e di altri funghi disseccatori dei rami.

La serie di ricerche che ho iniziato, muovendo da simili considerazioni, è ben lontana dall'esser compiuta, e dai resultati parziali che ho pubblicato non era lecito a me, nè ad altri, di trarre delle conclusioni definitive sulle cause della malattia. È perciò assolutamente arbitrario il volermi attribuire l'opinione che il *mal dell'inchiostro* sia prodotto dall'*Endothia radicalis* (1).

Aggiungendo un altro organismo alla serie di quelli che possono contribuire al disseccamento più o meno rapido della chioma dei castagni ammalati, non è stata mia intenzione di sostituirlo al *Coryneum* nella parte, che nell'eziologia dell'*inchiostro*, è stata attribuita a questo fungo dai professori Briosi e Farneti. L'interpretazione data da questi autori, ai resultati delle mie ricerche sarebbe stata forse giustificata se noi avessimo sulla natura della malattia lo stesso concetto. Ora ciò non è evidentemente.

Non accettando le conclusioni relative all'infezione dei rami come prima causa dell'*inchiostro*, mi sono proposto di studiare le diverse manifestazioni patologiche che si riscontrano nelle piante ammalate, subordinandole fra loro secondo i più probabili rapporti di causalità.

L'aver trovato che l'*Endothia radicalis*, sviluppandosi alla base del tronco o anche sulle grosse radici, può precedere il *Coryneum* e favorirne anzi l'attacco sulla chioma dell'altero, ciò non equivale ad affermare essere l'*Endothia* la causa della malattia. Una simile affermazione sarebbe in aperta contraddizione coi resultati delle mie stesse ricerche.

Io stesso infatti ho dichiarato che le prove d'inoculazione eseguite con questo fungo non hanno prodotto alcuna alterazione, e ho dichiarato anche d'ignorare se in tutti i castagni colpiti dalla malattia dell'inchiostro si trovi sempre l'*Endothia*, ed infine mi sono proposto di stabilire se l'infezione della base del tronco, *che sempre precede il disseccamento dei rami*, fosse preceduta a sua volta da un'alterazione delle radici. E i risultati per ora ottenuti, e resi noti intorno a questo ultimo argomento, sono ben lungi dallo escludere che la causa prima della malattia risieda in un'alterazione parassitaria delle radici.

Concludendo, la mia constatazione sulla presenza dell'*Endothia* sui tronchi e sui rami degli alberi ammalati ha questo d'importante, che essa dimostra come gli organismi ai quali si deve attribuire il rapido disseccamento della parte aerea possono esser diversi, senza una specifica azione parassitaria. Io riconosco che il *Coryneum* è il principale e più diffuso fra questi agenti di disseccamento, ma sostengo che l'intervento di questo o di altri funghi rappresenta l'ultimo stadio della malattia, non il principio.

(1) Cfr. la Nota pubblicata dai proff. Briosi e Farneti nel fascicolo precedente di questi Rendiconti, pag. 361.

Per me le cause patogene che pongono i castagni nelle condizioni di essere attaccati da questi deboli parassiti sono ancora completamente ignote.

***

Per dimostrare l'inattendibilità delle mie affermazioni riguardo all'infezione dell'*Endothia radicalis*, i proff. Briosi e Farneti mi muovono alcuni appunti ai quali desidero rispondere brevemente, in attesa di farlo più in esteso nel lavoro definitivo.

1.° Non vi è contradizione [1] nella mia affermazione circa due infezioni separate nelle piante giovani o in quelle adulte. Nelle prime quando il *Coryneum* attacca la base del fusto già preesiste l'alterazione delle radici e del colletto, precisamente come in quelle adulte dove l'infezione del *Coryneum* avviene sui rami alti.

2.° Come ho isolato l'*Endothia?* [2] Gli autori mi attribuiscono una ben incompleta conoscenza di ciò che è l'isolamento di un microrganismo da un tessuto ammalato! Il metodo che io adopero da 15 anni con ottimi risultati è descritto in altri miei lavori. Eccone le principali operazioni: 1° prelevamento asettico di un tassello del tessuto ammalato in vicinanza del limite col tessuto ancora sano, previo esame microscopico per constatarvi la presenza di micelio; 2° sezioni eseguite con rasoio sterilizzato alla fiamma; 3° lavaggi consecutivi delle sezioni in tre provette contenenti acqua sterilizzata; 4° semina delle sezioni in agar nutritiva; 5° esame microscopico giornaliero delle sezioni (in scatole Petri) in modo di seguire l'eventuale sviluppo del micelio racchiuso nel tessuto.

Con questo metodo gl'inquinamenti dovuti a germi puramente saprofiti, viventi su parti già morte, sono resi estremamente difficili e d'altra parte sono sempre controllabili.

L'esistenza del micelio di *Endothia* nei tessuti corticali (parenchima liberiano, parenchima corticale) e nel legno della base del tronco, dei rami e delle grosse radici è resultata in modo non dubbio, anche quando sulla superficie di questi organi non si vedevano i caratteristici stromi di colore arancione.

È dunque completamente inesatto il dire che io non ho mai trovato direttamente l'*Endothia* nei castagni ammalati. La difficoltà di vedere gli organi sporigeni del fungo sul tronco deriva semplicemente dall'ubicazione loro fra le screpolature del grosso ritidoma e anche dal fatto che la ricerca non sempre coincide con l'epoca della loro formazione completa. Le mie ricerche infatti sono state rivolte di preferenza a piante che si trovavano all'inizio dell'alterazione della base del tronco.

(1) Cfr. a pag. 362 della Nota dei proff. Briosi e Farneti già citata.
(2) Cfr. a pag. 363 loc. cit.

3.° Confermo il fatto (1) di non aver quasi mai osservato lo sviluppo di fruttificazioni di *Endothia* sulle radici dei castagni ammalati, al contrario di quanto è possibile osservare su radici, restate allo scoperto e rotte, di piante perfettamente *sane*, nelle quali però il fungo manca sul tronco. Questa differente localizzazione in piante sane e in piante affette dal *mal dell'inchiostro* è la prova migliore che l'*Endothia* non è un parassita così virulento da attaccare piante in condizioni normali, ciò che corrisponde al risultato negativo delle inoculazioni sperimentali; in secondo luogo resta indirettamente dimostrato che nei castagni colpiti dal *mal dell'inchiostro* la base del tronco offre un grado elevato di ricettività per l'*Endothia*, cioè i tessuti in quella regione si trovano in condizioni patologiche.

L'arresto di sviluppo del micelio di questo fungo nelle radici probabilmente è dovuto al particolare marciume nero. L'*Endothia* dunque, in questo caso, non è che l'esponente e un'aggravante di uno stato anormale, preesistente alla penetrazione del micelio. Credo opportuno di far notare inoltre che allo stato attuale delle nostre cognizioni intorno alle forme comprese sotto il nome di *Endothia radicalis*, non si può escludere che fra queste si trovino delle differenze morfologiche non solo ma anche biologiche che potrebbero render ragione di alcuni fatti. Uno studio in proposito è ora in corso.

La forma da me isolata si sviluppava in tessuti *vivi*, ciò era ben dimostrato dalla reazione delle cellule contro l'invadenza del micelio con la formazione di pareti suberificate.

4.° Discontinuità delle striscie d'infezione sul tronco (2). Nelle piante nelle quali il disseccamento della chioma è da poco incominciato, le striscie discendenti di necrosi prodotte dal *Coryneum* non raggiungono ancora il tronco (3). In questi casi, abbattendo l'albero, si trova che i tessuti della base del tronco sono più o meno imbruniti secondo zone assai estese. Da questi tessuti non ho mai potuto isolare il *Coryneum*, nè vi ho trovato fruttificazioni di questo fungo. D'altra parte l'esame microscopico non rivela la presenza del micelio facilmente riconoscibile.

Non si tratta dunque in questi casi di focolai diversi d'infezione del *Coryneum*, nè d'interruzione apparente con la necrosi dei rami, giacchè a due, a tre metri dal livello del suolo il durame, l'alburno e i tessuti corticali si trovano in condizioni normali. Nelle piante annose vicine a morire è facile trovare il *Coryneum* tanto all'estremità dei rami che alla base del tronco, e non ho mai negato che in questi casi vi sia una continuità d'in-

(1) Cfr. a pag. 363 loc. cit.

(2) Cfr. a pag. 365, loc. cit.

(3) I proff. Briosi e Farneti mi fanno dire che i cancri del *Coryneum* si arrestano ai rami di 3° e 4° ordine; si rilegga la mia prima Nota a pag. 777 dove mi riferisco a piante *non molto deperite*. Mentre a pag. 779 faccio notare che negli ultimi stadî della malattia la necrosi discendente dei rami raggiunge il tronco.

fezione dall'alto al basso. Soltanto in un simile stadio della malattia la necrosi discendente si è confusa con quella ascendente dalla base e non è più possibile stabilire la precedenza e l'indipendenza di quest'ultima da quella prodotta dal *Coryneum*.

5.° Risanamento dei castagni ammalati mediante il taglio (1). Nell'ultima mia Nota già citata (pag. 867) ho esposto il caso di alcuni castagneti ridotti a ceduo in zone ammalate. Nelle piante nelle quali la necrosi dei tessuti erasi già manifestata alla base del tronco prima del taglio, i polloni che naturalmente si erano originati dalla parte dove il legno era ancora sano, vivevano quasi esclusivamente per le radici sane originatesi dai polloni stessi o dalla ceppaia subito sotto di questi. Le radici vecchie erano tutte invase dal marciume. Che in simili condizioni di ringiovanimento delle piante il diffondersi del male possa esser ritardato e anche temporaneamente arrestato è comprensibile almeno in parte. Però, come ho già fatto osservare, non mancano esempî di rapida morte dei polloni dopo il secondo taglio. L'esempio citato dai proff. Briosi e Farneti di pollonete che rimangono sane da 20 anni in mezzo a una selva che fu devastata dal *mal dell'inchiostro* mi pare che dimostri bene che non basta la presenza del *Coryneum* in un castagneto per produrre la malattia. Anche i ripianti eseguiti nelle località infette alcune volte possono restare immuni più di 20 anni, ma finiscono poi per soccombere. Si tratta di un fatto che costituisce una prova non dubbia della incapacità del *Coryneum* ad attaccare delle piante veramente sane e dimostra pure che i processi di alterazione delle radici e del colletto della pianta, che ancora sfuggono alle nostre indagini, sono oltremodo lenti.

Patologia. — *La trasmissione sperimentale delle Leishmaniosi del Mediterraneo ai topi per mezzo delle pulci* (2). Nota del dottore C. Basile, presentata dal Socio B. Grassi.

Seguendo il metodo del Grassi *della limitazione delle forme sospette per via di comparazione*, io potei prontamente incriminare (1910) (3) la pulce come ospite trasmissore della leishmaniosi umana e canina del Mediterraneo, e però iniziai delle ricerche per darne una dimostrazione rigorosa e completa sotto ogni riguardo.

Ottenni infatti dapprima (4) lo sviluppo sperimentale delle *Leishmania* in *ctenocephalus serraticeps canis* e dimostrai poi (1911) (5), con ripetuti

(1) Cfr. a pag. 366, loc. cit.
(2) Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.
(3) Basile C. Rend. Acc. Lincei, nov. 1910.
(4) Rend. Acc. Lincei, genn. 1911.
(5) Red. Acc. Lincei, febb.-marzo-giugno 1911.

esperimenti, nei quali mi giovai di cagnolini neonati, e con metodiche ricerche nei focolai endemici di leishmaniosi che la pulce è ospite trasmissore naturale della suddetta infezione.

I miei esperimenti sono stati recentemente confermati da Sergent, Lerithière, Lèmaire (1).

Nel principio dei miei studi (1909-1910) io potei stabilire che a Bordonaro (Messina), focolaio endemico di leishmaniosi umana e canina, circa il quattro per mille delle pulci *serraticeps* ed *irritans* raccattate nelle coltri e nelle materassa di bambini infetti e su cani con questi conviventi, presentarono nel loro intestino dei protozoi che io definii « tipo *Leishmania* ».

Anche nelle successive ricerche sull'identità della leishmaniosi umana e canina del Mediterraneo e sulle condizioni di ambiente ove si iniziarono alcuni casi sporadici di leishmaniosi infantile, io potei osservare che solo una minima percentuale delle pulci raccattate sui bambini e sui cani infetti, conviventi nella stessa casa, presentavano nel loro intestino i suddetti protozoi da me interpretati *Leishmania*.

Io giunsi a questa interpretazione giacchè tali protozoi mi apparvero del tutto identici alle *Leishmania* dell'ospite vertebrato, sul quale le pulci erano state raccolte, ed invece del tutto o in parte morfologicamente differenti dai comuni *Herpetomonas* e *Crithidia*, rinvenuti e descritti nelle pulci da varî autori.

La suddetta mia interpretazione riceve oggi piena conferma dal seguente esperimento.

Il 25 e 26 gennaio 1913 da un cane intensamente infetto di leishmaniosi naturale furono raccattate circa 200 pulci, le quali dopo essere state legate col metodo seguito per primo dal Nöller (2) furono mantenute alla temperatura di 22° cc.

Queste pulci, il giorno dopo che erano state raccattate, furono poste a succhiare su cagnolini neonati e così potei esaminare le loro feci.

Solamente tre pulci presentarono protozoi « tipo *Leishmania* » nelle loro feci: l'infezione era scarsissima in una pulce, ed intensa invece nelle altre due.

Dall'intestino della pulce scarsamente infetta fu eseguito un preparato per strisciamento; le altre due pulci furono dissezionate anche esse ed il loro intestino, in parte, fu emulsionato in soluzione fisiologica sterile a 22° cc. ed, in parte, servì ad allestire due preparati per strisciamento, nei quali i parassiti si mostrarono abbondantissimi. La suddetta emulsione dell'intestino di queste due pulci infette fu inoculata per via peritoneale in due topi bianchi (*mus musculus*).

(1) Soc. de Pathologie Exotique, ottobre 1912.
(2) Nöller, Arch. für Protistenkunde, 1912.

Ambedue questi topi furono sottoposti il 26 febbraio ad una prima disarticolazione tibio-femorale, ed il 10 marzo ad una seconda; queste due disarticolazioni furono tollerate benissimo dai topi, però l'esame microscopico del midollo osseo tibiale di questi animali non presentò mai parassiti.

Il 22 marzo 1913. 56° giorno dalla inoculazione, essendo ambedue i topi privi degli arti posteriori, mi decisi a sacrificarne uno. La milza apparve di un colorito rosso-cupo ed ipertrofica, il fegato apparve però normale; nei preparati per strisciamento di questi organi rinvenni subito delle *Leishmania* identiche a quelle rinvenute nell'intestino delle pulci che erano servite per inoculazione, ed a quelle degli organi emopoietici del cane su cui le due pulci erano state raccattate.

Questo mio studio, oltre a confermare tutte le mie precedenti ricerche sull'etiologia della leishmaniosi del Mediterraneo, dimostra che i protozoi da me definiti tipo *Leishmania* e da me rinvenuti in pulci raccolte su bambini o su cani infetti di leishmaniosi, rappresentano effettivamente stadî di sviluppo delle *Leishmania* nell'intestino delle pulci e non protozoi proprî di quest'insetto.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Grassi, a nome anche del Corrisp. Ruffini, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione negli Atti accademici della Memoria del dott. G. Cotronei intitolata: *L'apparato digerente degli Anfibi nelle sue azioni morfogenetiche. — Ricerche sull'accrescimento larvale e post-larvale.*

Con eguale proposta d'inserzione conclude una Relazione letta dal Socio Pirotta, a nome dei Colleghi Mattirolo e Baccarini, su una Memoria dei dottori Béguinot e Belosersky avente per titolo: *Revisione monografica del genere Apocynum L.*

Le proposte delle precedenti Commissioni esaminatrici, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta poscia le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dal Socio Taramelli, e dai Corrispondenti Fantòli, Marcolongo, Pascal e Reina.

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna annuncia che alla seduta assistono il prof. Benedict della « Carnegie Institution » di Washington, e il prof. Bjerknes della Università di Lipsia; e a nome dell'Accademia saluta gl' intervenuti.

Il Segretario Grassi legge un telegramma di ringraziamento del Socio Emery in risposta all'affettuoso ricordo inviatogli dall'Accademia nella Seduta del 2 marzo scorso.

Lo stesso Presidente dà partecipazione di un invito pervenuto all'Accademia riguardante il dodicesimo Congresso internazionale di Geologia, che si terrà nel prossimo agosto al Canadà; ed aggiunge che al predetto Congresso l'Accademia sarà rappresentata dal Socio prof. De Stefani.

Un altro invito è giunto all'Accademia per prender parte all' Esposizione internazionale che avrà luogo a Panama nel 1915.

Il Presidente mette poi a disposizione dei Colleghi le schede di sottoscrizione per le onoranze che saranno tributate ad Ascanio Sobrero, e per contribuire a una fondazione in onore di Lord Lister.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 aprile 1913.

Annuario della Associazione amichevole fra gli Ingegneri ex-allievi della scuola di Torino, fondata nel 1908, laureati dal 1862 al 1910. Torino. 1912. 8°.

Burali-Forti C. — Sur les dyads et les dyadics da Gibbs. (Extr. de l' « Enseignement mathématique », 1912). Génève, 1912. 8°.

Calza P. F. — L'aritmetica dell'avvenire. (Tavole delle cifre costanti). Napoli, 1912. 8°.

Cavasino Alf. — Ancora del metodo per determinare l'azimut dell'epicentro d'una scossa coi dati d'un solo Osservatorio. (Estr. dal « Bollett. della Società Sismologica Ital. », vol. XVI). Modena, 1912. 8°.

Cortese E. — La Regione sismica calabro-peloritana. Genova, 1913. 8°.

Fantoli G. — Il Po nelle effemeridi di un secolo. (Estr. dagli « Atti della Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze ». VI Riunione, 1912). Roma, 1913, 8°.

Fantoli G. — Linee segnalatrici della possibilità climatica e loro applicazione idraulica. (Estr. dai « Rend. del R. Istit. Lomb. di scienze e lett. », vol. XLVI). Pavia. 1913. 8°.

Geigel R. — Die Mechanik der Embolie. (Separat. aus « Virchows Archiv für pathol. Anat. und Physiologie », 211 Band). Berlin, 1913. 8°.

L'Institut de Physiologie de l'Université de Groningue. (Avec deux plans). Groningue, s. d. 8°.

Marcolongo R. — Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. (Estr. dagli « Atti del IV Congresso internaz. dei Matematici », vol. III, sez III-A). Roma, 1909. 8°.

Marcolongo R. — Le curve del vertice di un giroscopio poligonale di Gruey. (Estr. dal « Rend. della R. Accad. delle scienze fis. e mat. di Napoli », 1912). Napoli, 1912. 8°.

Marcolongo R. — Sull'equazioni dell'elettrodinamica. Nota 1ª, 2ª e 3ª (Estr. dal « Rend. della R. Accad. delle scienze fis. e matem. di Napoli », 1912). Napoli, 1912. 8°.

Marcolongo R. — Sull'equazione della propagazione del calore nei corpi cristallizzati. (Estr. dal « Rend. della R. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli », 1911). Napoli. 8°.

Marcolongo R. — Sur les dyads et les dyadics de Gibbs. (Extr. del' « Enseignement mathématique », 1912), Génève, 1912. 8°.

Marcolongo R. — Un trattato inedito di meccanica di Vincenzo De Filippis anteriore alla « Mécanique analytique » di Lagrange. (Estr. dagli « Atti del IV Congresso internaz. dei Matematici », III. sez. IV). Roma, 1909. 8°.

Marcolongo R. — Une démonstration vectorielle du théoréme de Dupin. (Extr. de l' « Enseignement mathém. », 1912). Génève, 1912. 8°.

Messeri V. — In memoria di Costantino Pittei; cenni necrologici. (Estr. dal « Boll. di Matematica », XI). Bologna, 1912. 8°.

Pascal E. — Il Planimetro a scure di Prytz trasformato in integrafo, per una notevole equazione differenziale. (Estr. dal « Rend. della R. Accad. delle Scienze fis. e matem. di Napoli », 1913). Napoli, 1913. 8°.

Reina V. — Matematica di precisione e matematica di approssimazione. (Estr. dagli « Atti del III Congresso della Mathesis »). Roma, 1913, 8°.

The Rockefeller Institute for medical Research. History, organization and equipment. New York, 1912. 8°.

Rousseau Chas. M. — The Analysis of Light. San Francisco, California, U. S. A. 1913. 8°.

Taramelli T. — Se l'Appennino settentrionale rappresenti in realtà un carreggiamento. (Estr. dai « Rendiconti », vol. XLVI). Pavia, 1913. 8°.

Taramelli T. — Se le Dinaridi costituiscono realmente una massa carreggiata. (Estr. dai « Rend. del R. Ist. Lomb. di scienze ». S. II, vol. XLV). Milano, 1913. 8°.

Ugolini Pr. — Campanula elatines L. e C. elatinoides Moretti nelle Alpi Centrali. (Estr. dal « Bull. della Soc. bot. ital. »). Firenze, 1902. 8°.

Rendiconti_Lincei_1913-04-20_22_part-1

2024-12-08

Box: IA40528321
Old Pallet: IA405283

Accademia Nazionale dei Lincei. Atti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti 1913-04-20: Vol 22 Part 1

INTERNET ARCHIVE

2037-4631

di asintotiche a

del Socio LUIGI

4. Applicando i risultati generali sopra stabiliti [1] alle superficie della classe (A), ove

$$K = -\frac{1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2},$$

vediamo che il teorema di unicità e di esistenza prende qui l'aspetto seguente:

Date ad arbitrio due curve C, Γ *che escano da un punto* O, *avendo ivi a comune il piano osculatore, e torsioni eguali e di segno contrario, esiste una ed una sola superficie* S *della classe* (A) *che contiene le curve* C, Γ *come asintotiche.*

E infatti, poichè le torsioni di C, Γ sono perfettamente note in funzione di v, u rispettivamente, avremo

$$\varphi(u) + \psi(0) = A(u)$$
$$\varphi(0) + \psi(v) = B(v),$$

[1] Rendiconti, fascicolo precedente, pag. 403.